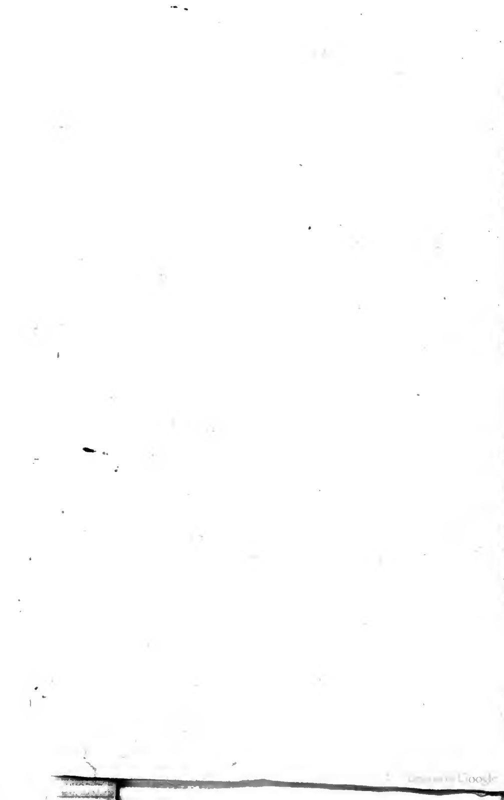




APOLLONII PERGÆI

DE

SECTIONE RATIONIS

LIBRI DUO

Ex ARABICO MS^{to}. Latine Versi.



ACCEDUNT

Ejusdem de SECTIONE SPATII

Libri Duo Restituti.

Opus Analyseos Geometricæ studiosis apprime Utile.

PRÆMITTITUR

PAPPI ALEXANDRINI Præfatio ad VII^{mum} Collectionis Mathematicæ, nunc primum Græce edita:

Cum Lemmatibus ejusdem PAPPI ad hos *Apollonii* Libros.

Opera & studio EDMUNDI HALLEY
Apud OXONIENSES
Geometriæ Professoris Saviliani.

OXONII,
E THEATRO SHELDONIANO
Anno MDCCVI.

REVERENDO VIRO

D. *HENRICO ALDRICH*

S. T. P.

Ædis Chriſti Decano,

Summo bonarum Literarum,

Præſertim Mathematicarum,

Fautori ac Vindici,

Hæc APOLLONII PERGÆI Opuſcula,

E tenebris eruta ac reſtituta,

Ea qua par eſt humilitate,

In perpetuum grati animi teſtimonium,

Offert, dicat, conſecratque

EDMUNDUS HALLEY.

Præfatio ad Lectorem.

QUAMVIS *de scientiis Mathematicis, hâc nostrâ & superiore ætate, præclare meruerint Viri eruditi, qui* Algebram Speciosam, Arithmeticam Infinitorum, *nuperamque* Fluxionum *doctrinam adinvenerunt & excoluerunt: nihil tamen inde* Veterum *gloriæ detrahitur, qui Geometriam ad eam provexere perfectionem, quam facilius forsan fuisset posteris mirari, quam absque* Antiquorum *scriptis investigando assequi. Quod egregii consummatique Geometræ exstiterint, magnoque acumine & solertiâ præditi, abunde testantur vel* Euclidis *solius,* Archimedis, *&* Apollonii *quæ supersunt. Plurima quidem illi (ut cæteros taceam) nobilissimaque reliquerunt ingenii monumenta; quorum nonnulla, quæ scilicet manifestam præ se tulerunt utilitatem, quæque proinde conservari humani generis maxime intererat, temporis injuriam sceleratasque plusquam barbarorum manus effugerunt: dum illa, quæ penitiora scientiæ magisque abstrusa continebant, neminem nacta vindicem idoneum aut custodem fidelem, utcunque pretiosa, fatali strage periere. Hinc factum, ut, magno rei literariæ damno, hactenus desiderarint Mathematici libros istos de* Analysi Veterum, *quorum nomina & argumenta ex* Pappo *solo habemus, eaque haud satis integra; quod & ipse mutilus magnaque sui parte truncatus ad nos pervenerit. Universos sane deperditos existimavit & deflevit Orbis eruditus, donec liber* Arabicus *cui titulus,*

كتاب ابلونيوس فقطع الخطوط علي النسبة

felici fato, repertus erat in Bibl. Bodleianâ *inter* Codd. *MSS. Cl.* Seldeni: *ubi diu latitavit, ac forsan diutius aliquanto latitasset, nisi, paucis abhinc annis, in manus incidisset D.* Ed Bernardi, *Astronomiæ Professoris* Saviliani, *& linguarum Orientalium peritissimi: qui statim Codice inspecto comperit esse Traductionem* Arabicam Apollonii περὶ λόγου ἀποτομῆς.

Bernardus *igitur, libro præclaro invento lætatus, alacriter*

ese eidem Latine vertendo accingebat. Verum antequam vel decimam partem absolverat ab incœpto destitit, sive aliis studiis avocatus, sive operis difficultate perterritus: nam Codex ille non solum pessima manu exaratus erat, punctisque diacriticis plerumque destitutus, quibus in scripturâ Arabicâ *literæ quamplurimæ solent distingui; sed & gravioribus adhuc vitiis laborabat, quod verba sæpiuscule & integras nonnunquam periodos omiserit, & Diagrammatum lineas literis male signatas & distinctas habuerit: adeo ut Divinatorem potius quam Interpretem ad sensum genuinum eruendum requisisse videretur. Postquam autem* Bernardus *è vivis excesserat, quicquid* Apollonii *traductum erat male habitum & neglectum jacebat, donec hortatu Viri Optimi & doctissimi D.* Henrici Aldrich *S. T. P. &* Ædis Christi Decani, *illud in manus sumpserat Collega meus* μαθηματικώτατος D. Gregorius, Bernardi *in Cathedra* Saviliana *Successor dignissimus. Hic loca nonnulla in Versione* Bernardina *castigavit & supplevit, totamque manu eleganti in usum* Decani *describi curavit. Postquam autem, magno* Wallisio *ad superos migrante, munus Professorium, quod ille egregie ornaverat, in me collatum esset; & forte fortuna* Apollonii *apographum istud, humanitate* Decani *supra memorati, conspexissem: magna me incessit cupido tentandi quid ipse in reliquo* Apollonii *vertendo præstare potuerim. Opus sane arduum & impeditum aggressus sum, qui, Linguæ* Arabicæ *prorsus ignarus, librum in ea conscriptum, mendisque innumeris & Lacunis non paucis refertum, interpretandi onus in me susceperim. Verum beneficio Schedarum quas traduxerat* Bernardus, *& quæ mihi Clavis ad instar aditum aperuerunt ad* Apollonii *mentem investigandam, primum voces illas excerpsi de quibus ex Versione* Bernardi *liquido mihi constabat; dein ad argumentum respiciendo, & notas obscuriores iterum iterumque mecum evolvendo, quid sibi voluerunt paullatim deprehendi: & hâc quasi* deciphrandi *methodo (ut ita loquar) eousque progressus sum, ut totum fere librum perlegerim, ac quodammodo intellexerim; eundemque denuo pedetentim percurrendo, opus integrum, absque alterius cujuspiam auxilio, ad eam quam videtis formam perduxerim.*

Quod ad Codicem MS. attinet, qui nobis aureum Apollonii *libellum unicus conservavit; in eo, Librarii (ut suspicor) incuriâ, plurimas hinc inde periodos desiderari comperi; quas, prout*

prout sensus & demonstratio postulabat, verbis meis, sed diverso charactere excusis, supplevi. Veruntamen non vanam præ se fert Antiquitatis speciem, utpote qui primæ paginæ adscriptum habeat Possessoris nomen, anno Hegiræ 633. *i. e.* Christi 1235. *unde liquet ante quingentos annos scriptum fuisse. Quo autem tempore adornata fuerit hæc Versio, pro certo statuere non possum: conjecturis tamen inductus credo, factam esse paulo post annum* Christi 820, *auspiciis* Almamonis Chalifæ *sive* Imperatoris Saracenorum. *Qui, miro flagrans literarum amore, libros Philosophorum & Mathematicorum optimos à* Græcis *Imperatoribus impetravit; atque id negotii popularibus suis dari voluit, ut eos, summa qua potuerunt fide & elegantia, in linguam* Arabicam *verterent.*

Jam si quæratur unde constat hunc tractatum genuinum esse Apollonii *fœtum? En tibi rationes, meo judicio, non contemnendas. Primo, in tot Loca & Casus divisus est uterque liber, quot utrique* Apollonii τοῦ λόγου ἀποτομῆς *tribuit* Pappus, *in Præfatione ad* VIImum Collect. Math. 2do *Idem est numerus & ordo diorismῶν, iidemque Casus dioristici.* 3° *Liber nostri* Apollonii *secundus, eodem modo ac ille quem describit* Pappus, *totus ad primum refertur, à quo etiam diorismos omnes mutuatur.* 4° *Lemmata eadem quæ in libro* Arabico *passim occurrunt, in principio libri septimi (ut ab* Apollonio *desumpta) demonstrat* Pappus. 5° *Quatuor ultima* Pappi *Lemmata eodem ordine ac iisdem fere verbis traduntur, quibus Maximarum & Minimarum Rationum termini, in limitationibus ad Casus secundos & quartos Locorum* VIti & VIImi *primi Libri nostri. Denique Diagrammata fere omnia* Græcam *referunt Originem, eo quod linearum notas dispositas habeant juxta ordinem Alphabeti* Græcorum, *qui ab illo Alphabeti* Arabum *plane diversus est.*

Si quis objiciat librum hunc, simili licet argumento, methodo tamen Apollonianæ *plane dissimili scriptum esse; quod in Casibus universis singulas rerum minutias percurrat, & plurima fuse demonstret, quæ nulla videntur egere demonstratione. Velim is cogitet, librum hunc ex eorum numero primum esse, quos ad* Artis Analyticæ *institutionem adhibitos memorat* Pappus; *unde necesse habuerit Auctor quamplurima in discentium usum plenius & enucleatius tradere, exemploque fertilissimi Problematis per omnes Casus soluti commonstrare,*

strare,

strare, quid in simili proposito investigare debeat Analysta.
Hæc de Apollonii *libello jam primum in lucem edito*; *ex quo satis liquet, quo pacto* Veteres, *adhibitis proportionalium proprietatibus, Problemata plana ad æqualitatem duorum rectangulorum deducebant*; *quorum alterum quidem datum erat, alterius vero laterum summa vel differentia. Neque ulterius in exsequendâ Compositione progressi sunt, quia in sexto* Elementorum *Prop.* 28va *&* 29va, *& in Prop.* 58va *&* 59va, *iterumque Prop.* 84va *&* 85va Datorum Euclidis, *rectangulum datum excedens vel deficiens quadrato ad datam rectam applicare docemur*; *quæ quidem Effectiones coincidunt cum* Æquationum quadraticarum (*uti nunc loquimur*) *Constructionibus Geometricis. Methodus hæc cum* Algebrâ speciosâ *facilitate contendit, evidentiâ vero & demonstrationum elegantiâ eam longe superare videtur*: *ut abunde constabit, si quis conferat hanc* Apollonii *doctrinam* de Sectione Rationis *cum ejusdem Problematis Analysi Algebraicâ, quam exhibuit Clarissimus* Wallisius, *Tom.* II. *Operum Math. Cap.* LIV. *pag.* 220.

Ut vero methodum hanc præstantissimam magis adhuc illustrarem & Matheseos Studiosos pleniori demererer obsequio, ad libros Apollonii *de* Sectione Spatii *restituendos memet accinxi*; *nec inani, ut persuasissimum habeo, conatu. Nam per omnia ipsius* Apollonii *ordinem & argumenta assequutus mihi videor, quantum scilicet ex* Pappi *descriptione vel aliunde licet conjicere*: *quam bene autem hoc præstiterim aliorum esto judicium. Denique cum Versioni nostræ, ad majorem problematis dilucidationem, optimum visum fuerit* Scholia *nonnulla inserere, quorum ope* Loca Geometrica, *rectas omnes datam rationem abscindentes contingentia, designari possint*: *itidem in* Sectione Spatii, *quo modo similium* Locorum *descriptio fieret demonstratum dedi, propriisque solutionibus attexui, ne quid in hac de* Sectionibus *doctrina desideraretur. Insuper ad calcem Præfationis* Pappi, *de qua mox dicturus sum, prima viginti* Lemmata *è Libro Septimo* Collect. Math *excerpta adjeci*; *quia in demonstrationibus* Apollonii *de utrâque* Sectione *ea assumpta fuisse plane asserit* Pappus, *resque ipsa testatur.*

Valde quidem dolendum est, quod reliqui tractatus Veterum Analytici, à Pappo *memorati, aut perierint, aut nondum*

lucem conspexerint. Nam minime dubito quin illorum nonnulli, Arabice *saltem versi, alicubi terrarum lateant, pulvere magis quam tenebris suis involuti. Quamobrem ut ab eruditis, quos ad Bibliothecas penitus excutiendas iterum iterumque hortor, melius faciliusque reperiantur & dignoscantur,* Pappi *Præfationem, non antehac* Græce, *immo vix* Latine *editam, operibus hisce præmisi; pristinæ integritati, quoad ejus fieri potuit, restitutam è duobus Codd. MSS. Bibliothecæ* Savilianæ. *Verum, ut ingenue fatear, manum adhuc medicam postulat. Nam ut* Græca Pappi *in hisce Codicibus sæpiuscule luxata sunt & depravata, præcipue in descriptione* Porismatum Euclidis, *(ubi nihil fere sani occurrit) ita in plerisque absurda adeo & insulsa erat* Commandini *Versio, ut necesse habuerim, aut passim eam emendare aut aliam de novo conficere.*

Quin & alias ob causas expoliri & publicari meruerit hæc Pappi *Præfatio.* PRIMO, *ut ex eâ ostendatur* Cartesium *falsò Veteres ignorantiæ insimulasse, quasi is primus mortalium Locum ad quatuor rectas ab* Euclide *incæptum componere noverit; cum tamen* Apollonius *hoc ipsum se effecisse non obscure indicaverit. Nam impossibile esse* * *dicit, perfectam ejus Compositionem exhibere, absque propositionibus quas ipse à se inventas prodidit in tertio* Conicorum: *quod idem est ac si dixisset, illis concessis facile & proclive fuisse* Euclidi *Locum composuisse. Et sane si quis contulerit solutionem illam operosam & immani calculo* Algebraico *perplexam, quam in principio Geometriæ suæ dedit* Cartesius, *cum admiranda illa concinnitate qua res tota Geometrice & absque omni calculo absolvitur, per Lemmata* XVII, XVIII, XIX. *Lib. primi* Princip. Math. Naturalis Philosophiæ, *adhibitis duabus propositionibus Lib.* III. Conic. *minime dubitabit quin* Apollonius *ipse hac in re majus quiddam præstiterit, quam ab eo præstitum existimat* Cartesius. *Insuper adjicere licet, quod ad problema de* Sectione Determinatâ, *ab* Apollonio *plenissime resolutum, tota redeat difficultas inveniendi punctum quintum in Loco describendo. Datis autem quinque punctis docet* Pappus *Locum Ellipticum perficere, Lib.* VIII. *Prop.* 13, 14. *Eodemque modo, nec difficilius, mutatis mutandis, Locus Hyperbolicus per data quinque puncta describitur.* SECUNDO, *ut palam fiat omnibus,* Regulam Guldini Centrobaricam, *inter inventa Geometrica superioris seculi præcipua nume-*

* Vide Pappi Præfat. p. XLII.

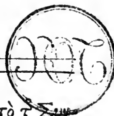
numeratam, ipsis etiam Veteribus innotuisse: cum Pappus, *sub finem hujusce Præfationis, disertim nobile illud Theorema describat, quo mensurantur Solida omnia gyro Planorum quorumvis genita; modo habeantur eorundem Centra Gravitatis. Nam si* ἀμφοισμα *reddatur* gyrans, ἀμφοισικὸν *vero* gyrando genitum, *res manifestior erit, quam ut probatione indigeat. Verum utrum hoc invenerit ipse* Pappus, *an à decessoribus suis acceperit, ex ipsius verbis haud liquet: pro certo tamen affirmare ausim, hanc Regulam illi perspectam fuisse, annis* 1200 *ante natum* Guldinum.

Jam demum non diffitendum est, quod libris à Pappo *descriptis denuo instaurandis operam navarint Mathematici recentiores. Duos quidem nostros de* Sectione Rationis *&* Spatii *quadantenus restituit* Willibrordus Snellius, *revocatos ad* Sectionem Determinatam, *ab ipso similiter instauratam.* Tactionum *doctrinam in* Apollonio Gallo *delineavit* Franciscus Vieta. Loca plana *à* Fermato, *in operibus ejus posthumis, miro acumine & judicio illustrata habemus: qui &* Porismata Euclidis, *opus longe difficillimum, redintegrare pollicitus est; verum fidem non liberavit. Denique* Inclinationum *problemata per omnes Casus exsecutus est* Marinus Ghetaldus. *Neque sane tantæ difficultatis sunt hæc omnia, ut alicui* Artis Algebraicæ *perito moram longam injiciant. Verum perpendendum est, aliud esse Problema aliqualiter resolutum dare, quod modis variis plerumque fieri potest, aliud methodo elegantissimâ id ipsum efficere; Analysi brevissimâ & simul perspicuâ, Synthesi concinnâ & minime operosâ. Hoc Veteres præstitisse argumento est* Apollonii *liber, quem impræsentiarum tibi sistimus: nec dubium est quin* Pappus *sub titulo* τόπου ἀναλυομένου *libros prædictos collegerit, ut exempla daret Analyseos Institutionis efficacissima, & discentium captui longe accommodatiora.*

Alia quæ te moneam jam non supersunt; hoc tamen unum ne nescias, tantisper te morabor, donec narravero, me in hisce omnibus edendis plurimum adjutum fuisse à viro amicissimo & de re literaria præclare merito D. Joh. Hudsono *S.T.P. Bibliothecæ* Bodleianæ *Præfecto: qui id sibi (qua est humanitate) curæ esse voluit, ut nitidior & emendatior prodiret libellus.*

Vale & fruere.

Πάππου



Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως προοίμιον εἰς τὸ τῆς Συναγωγῆς ἕβδομον, περιέχον τὰ Λήμματα τοῦ ἀναλυομένου τόπου.

Ὁ καλούμενος ἀναλυόμενος, Ἑρμόδωρε τέκνον, κατὰ σύλληψιν, ἰδία τίς ἐστιν ὕλη παρεσκευασμένη, μετὰ τὴν τῶν κοινῶν στοιχείων ποίησιν, τοῖς βουλομένοις ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικὴν τῶν προτεινομένων αὐτοῖς προβλημάτων· καὶ εἰς τοῦτο μόνον χρησίμη καθεστῶσα. γέγραπται δὲ ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν, Εὐκλείδου τε τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου, καὶ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου, κατὰ ἀνάλυσιν καὶ σύνθεσιν ἔχουσα τὴν ἔφοδον. ἀνάλυσις τοίνυν ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητουμένου, ὡς ὁμολογουμένου, διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων, ἐπί τι ὁμολογούμενον ἐν συνθέσει· ἐν μὲν γὰρ τῇ ἀναλύσει τὸ ζητούμενον ὡς γεγονὸς ὑποθέμενοι, τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει σκεπτόμεθα· καὶ πάλιν ἐκείνου τὸ προηγούμενον, ἕως ἂν οὕτως ἀναποδίζοντες καταντήσωμεν εἴς τι τῶν ἤδη γνωριζομένων, ἢ τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων. καὶ τὴν τοιαύτην ἔφοδον ἀνάλυσιν καλοῦμεν, οἷον ἀνάπαλιν λύσιν. ἐν δὲ τῇ συνθέσει ἐξ ὑποστροφῆς, τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη, καὶ τὰ ἑπόμενα ἐκεῖ, ἐνταῦθα προηγούμενα κατὰ φύσιν τάξαντες, καὶ ἀλλήλοις ἐπισυνθέντες, εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητουμένου κατασκευῆς· καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν. διττὸν δέ ἐστιν ἀναλύσεως γένος. τὸ μὲν ζητητικὸν τἀληθοῦς, ὃ καλεῖται θεωρητικόν· τὸ δὲ ποριστικὸν τοῦ προτεθέντος λέγειν, ὃ καλεῖται προβληματικόν. ἐπὶ μὲν οὖν τοῦ θεωρητικοῦ γένους, τὸ ζητούμενον ὡς ὂν ὑποθέμενοι, καὶ ὡς ἀληθές, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν, καὶ ὡς ἔστι καθ' ὑπόθεσιν, προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν ἀληθὲς ᾖ ἐκεῖνο τὸ ὁμολογούμενον, ἀληθὲς ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ψευδεῖ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ψεῦδος ἔσται καὶ τὸ

ζητούμενον. ἐπὶ δὲ τοῦ προβληματικοῦ γένους, τὸ προτεθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν, προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστὸν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθὲν, δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ προτεθὲν, καὶ πάλιν ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα. διορισμὸς δέ ἐστι προδιαστολὴ τοῦ πότε, καὶ πῶς, καὶ ποσαχῶς δυνατὸν ἔσται τὸ πρόβλημα. τοσαῦτα μὲν οὖν περὶ ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως.

Τῶν δὲ προειρημένων τοῦ ἀναλυομένου βιβλίων ἡ τάξις ἐστὶ τοιαύτη. Εὐκλείδου δεδομένων βιβλίον ἕν· Ἀπολλωνίου λόγου ἀποτομῆς δύο, χωρίου ἀποτομῆς δύο, διωρισμένης τομῆς δύο· ἐπαφῶν δύο. Εὐκλείδου πορισμάτων τρία· Ἀπολλωνίου νεύσεων δύο, τοῦ αὐτοῦ τόπων ἐπιπέδων δύο, κωνικῶν ὀκτώ· Ἀρισταίου τόπων στερεῶν πέντε· Εὐκλείδου τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν δύο· Ἐρατοσθένους περὶ μεσοτήτων δύο. γίνεται βιβλία λγ΄, ὧν τὰς περιοχὰς, μέχρι τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν, ἐξεθέμην σοὶ πρὸς ἐπίσκεψιν, καὶ τὸ πλῆθος τῶν τόπων, καὶ τῶν διορισμῶν, καὶ τῶν πτώσεων, καθ᾽ ἕκαστον βιβλίον· ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα· καὶ οὐδεμίαν ἐν τῇ πραγματείᾳ τῶν βιβλίων καταλέλοιπα ζήτησιν, ὡς ἐνόμιζον.

Περὶ τῶν Δεδομένων Εὐκλείδου.

Περιέχει δὲ τὸ πρῶτον βιβλίον, ὅπερ ἐστὶ τῶν δεδομένων, ἅπαντα θεωρήματα ἐννενήκοντα· ὧν πρῶτα μὲν καθόλου ἐπὶ μεγεθῶν διαγράμματα κγ΄· τὸ δὲ δ΄ καὶ τὸ κ΄ ἐν εὐθείαις ἐστὶν ἀνάλογον ἄνευ θέσεως· τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ιδ΄ ἐν εὐθείαις ἐστὶ θέσει δεδομέναις. τὰ δὲ τούτοις ἑξῆς ι΄ ἐπὶ τριγώνων ἐστὶ τῷ εἴδει δεδομένων ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἑπτὰ, ἐπὶ τυχόντων ἐστὶν εὐθυγράμμων χωρίων εἴδει δεδομένων ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἕξ, ἐν παραλληλογράμμοις ἔτι καὶ παραβολαῖς εἴδει δεδομένων χωρίων. τῶν δὲ ἐχομένων ε΄, τὸ μὲν πρῶτον * γραφόμενόν ἐστι, τὰ δὲ δ΄ ἐπὶ τριγώνων χωρίων, ὅτι αἱ διαφοραὶ τῶν δυνάμεων τῶν πλευρῶν

πρὸς

πρὸς πάντα τὰ τρίγωνα χωρία λόγον ἔχουσι δεδομένον. τὰ δὲ ἑξῆς ἑπτὰ, ἕως τοῦ ό καὶ γ', ἐν δυσὶ παραλληλογράμμοις, ὅτι διὰ τὰς ἐν ταῖς γωνίαις ὑποθέσεις ἐν δεδομένοις εἰσὶ λόγοις πρὸς ἄλληλα· ἔνια δὲ τούτων ἐπιλόγους ἔχει ὁμοίους ἐν δυσὶ τριγώνοις. ἐν δὲ τοῖς ἀφεξῆς ἐξ διαγράμμασιν, ἕως τοῦ ό καὶ θ', δύο μὲν ἐστιν ἐπὶ τριγώνων, δ' δὲ ἐπὶ πλειόνων εὐθειῶν ἀνάλογον οὐσῶν. τὰ δὲ ἑξῆς τρία, ἐπὶ δύο εὐθειῶν ἀνάλογον οὐσῶν, * τὰ δ' ἐστι, δοθέν τι περιεχουσῶν χωρίον. τὰ δὲ ἐπὶ πᾶσιν ὀκτὼ, ἕως ϟ, ἐν κύκλοις δείκνυται, τοῖς μὲν μεγέθει μόνον δεδομένοις, τοῖς δὲ καὶ θέσει· ὅτι διαγομένων εὐθειῶν διὰ δεδομένου σημείου τὰ γενόμενα δεδομένα.

Περὶ λόγου ἀποτομῆς β'.

Τῆς δ' ἀποτομῆς τοῦ λόγου βιβλίων ὄντων δύο, πρότασίς ἐστι μία ὑποδιῃρημένη· διὸ καὶ μίαν πρότασιν οὕτω γράφω. Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν τῇ θέσει δοθεισῶν δύο εὐθειῶν, πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις, λόγον ἐχούσας τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. Τὰς δὲ γραφὰς διαφόρους γενέσθαι καὶ πλῆθος λαβεῖν συμβέβηκεν, ὑποδιαιρέσεως γενομένης ἕνεκα, τῆς τε πρὸς ἀλλήλας θέσεως τῶν δεδομένων εὐθειῶν καὶ τῶν διαφόρων πτώσεων τοῦ δεδομένου σημείου, καὶ διὰ τὰς ἀναλύσεις καὶ συνθέσεις αὐτῶν τε καὶ τῶν διορισμῶν. Ἔχει γὰρ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον τοῦ λόγου ἀποτομῆς τόπους ἑπτὰ, πτώσεις κδ', διορισμοὺς δὲ πέντε, ὧν τρεῖς μὲν εἰσι μέγιστοι, δύο δὲ ἐλάχιστοι· καὶ ἔστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ έ τόπου, ἐλάχιστος δὲ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ ἕκτου τόπου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ ζ' τόπου, μέγιστοι δὲ οἱ κατὰ τὰς τετάρτας τοῦ ϛ' καὶ τοῦ ἑβδόμου τόπου. Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιδ', πτώσεις δὲ ξγ', διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ ὅλον εἰς τὸ πρῶτον. Λήμματα δ' ἔχει τὰ λόγου ἀποτομῆς κ', αὐτὰ δὲ τὰ δύο βιβλία τοῦ λόγου ἀποτομῆς θεωρημάτων ἐστὶ ρπά, κατὰ δὲ Περικλέα πλειόνων ἢ τοσούτων.

Περὶ χωρίου ἀποτομῆς β΄.

Τῆς δὲ ἀποτομῆς τοῦ χωρίου βιβλία μέν ἐστι δύο, πρόβλημα δὲ κἀν τούτοις ἓν ὑποδιαιρούμενον δίς. καὶ τούτων μία πρότασίς ἐστι τὰ μὲν ἄλλα ὁμοίως ἔχουσα τῇ προτέρᾳ, μόνῳ δὲ τούτῳ διαφέρουσα τῷ δεῖν τὰς ἀποτεμνομένας δύο εὐθείας ἐν ἐκείνῃ μὲν λόγον ἐχούσας δοθέντα ποιεῖν, ἐν δὲ ταύτῃ χωρίον περιεχούσας δοθέν· ῥηθήσεται γὰρ οὕτω. Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν δοθεισῶν θέσει δύο εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ᾽ αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις χωρίον περιεχούσας ἴσον τῷ δοθέντι. καὶ αὕτη δὲ διὰ τὰς αὐτὰς αἰτίας τὸ πλῆθος ἔσχηκε τῶν γραφομένων. Ἔχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον χωρίου ἀποτομῆς τόπους ζ΄, πτώσεις κδ΄, διορισμοὺς ζ΄· ὧν τέσσαρες μὲν μέγιστοι, τρεῖς δὲ ἐλάχιστοι. καὶ ἔστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν δευτέραν πτῶσιν τοῦ πρώτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην πτῶσιν τοῦ β΄ τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ τετάρτου, καὶ ὁ κατὰ τὴν τρίτην τοῦ ἕκτου τόπου· ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ τρίτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν δ΄ τοῦ τετάρτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ ἕκτου τόπου. Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον τοῦ χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιγ΄, πτώσεις δὲ ξ΄, διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ εἰς αὐτόν. Θεωρήματα δὲ ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον μη΄, τὸ δὲ δεύτερον ος΄.

Περὶ διωρισμένης τομῆς β΄.

Ἑξῆς τούτοις ἀναδέδονται τῆς διωρισμένης τομῆς βιβλία δύο, ὧν ὁμοίως τοῖς πρότερον μίαν πρότασιν πάρεστι λέγειν, διεζευγμένην δὲ ταύτην· τὴν δοθεῖσαν ἄπειρον εὐθεῖαν ἑνὶ σημείῳ τεμεῖν, ὥστε τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ᾽ αὐτῆς δοθεῖσι σημείοις, ἤτοι τὸ ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον, ἢ τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέντα λόγον ἔχειν, ἤτοι πρὸς τὸ ὑπὸ μιᾶς ἀπολαμβανομένης καὶ τῆς ἔξω δοθείσης, ἢ πρὸς τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἐφ᾽ ὁπότερα χρὴ τῶν δοθέντων σημείων. Καὶ ταύτης, ἅτε δὶς διεζευγμένης καὶ περισκελεῖς διορισμοὺς ἐχούσης, διὰ πλειόνων ἡ δεῖξις γέγονεν ἐξ ἀνάγκης.

ἀνάγκης. δείκνυσι δὲ ταύτην Ἀπολλώνιος ἐπὶ ψιλῶν τῶν εὐθειῶν τριβακώτερον πειρώμενος, καθάπερ καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν πρώτων στοιχείων Εὐκλείδου. καὶ ταύτην πάλιν εἰσαγωγικώτερον ἐπαναγράφων δείξας τε καὶ εὐφυῶς διὰ τῶν ἡμικυκλίων. Ἔχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον προβλήματα ἕξ, ἐπιτάγματα ιϛʹ, διορισμοὺς πέντε, ὧν μεγίστους μὲν δʹ, ἐλάχιστον δὲ ἕνα· καὶ εἰσὶ μέγιστοι μὲν, ὅ,τε κατὰ τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ δευτέρου προβλήματος, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ τετάρτου προβλήματος, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ εʹ, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἕκτου· ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ γʹ ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. Τὸ δὲ δεύτερον διωρισμένης τομῆς ἔχει προβλήματα τρία, ἐπιτάγματα ἐννέα, διορισμοὺς τρεῖς· ὧν εἰσὶν ἐλάχιστοι μὲν, ὅ,τε κατὰ τὸ τρίτον τοῦ πρώτου, καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ δευτέρου· μέγιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ τρίτου προβλήματος. Λήμματα δὲ ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον κζʹ, τὸ δὲ δεύτερον κδʹ. θεωρημάτων δέ ἐστι τὰ δύο βιβλία διωρισμένης τομῆς πγʹ.

Περὶ ἐπαφῶν βʹ.

Ἑξῆς δὲ τούτοις τῶν ἐπαφῶν ἐστι βιβλία δύο, προτάσεις δὲ ἐν αὐτοῖς δοκοῦσιν εἶναι πλείονες, ἀλλὰ καὶ τούτων μίαν τίθεμεν οὕτως ἔχουσαν· ἐξῆς σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων τριῶν ὁποιωνοῦν θέσει δοθέντων, κύκλον ἀγαγεῖν δι' ἑκάστου τῶν δοθέντων σημείων, εἰ δοθείη, ἐφαπτόμενον ἑκάστης τῶν δοθεισῶν γραμμῶν. ταύτης διὰ πλήθη τῶν ἐν ταῖς ὑποθέσεσι δεδομένων ὁμοίων ἢ ἀνομοίων κατὰ μέρος διαφόρους προτάσεις ἀναγκαῖον γίνεσθαι δέκα· ἐκ τῶν τριῶν γὰρ ἀνομοίων γενῶν τριάδες διάφοροι ἄτακτοι γίνονται δέκα. ἤτοι γὰρ τὰ δεδομένα, τρία σημεῖα, ἢ τρεῖς εὐθεῖαι, ἢ δύο σημεῖα καὶ εὐθεῖα, ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ σημεῖον, ἢ δύο σημεῖα καὶ κύκλος, ἢ δύο κύκλοι καὶ σημεῖον, ἢ δύο κύκλοι καὶ εὐθεῖα, ἢ σημεῖον καὶ εὐθεῖα καὶ κύκλος, ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ κύκλος, ἢ τρεῖς κύκλοι. Τούτων δύο μὲν τὰ πρῶτα δέδεικται ἐν τῷ τετάρτῳ βιβλίῳ τῶν πρώτων στοιχείων, ὅπερ * ἐῶ μὲν γράφων. τὸ μὲν γὰρ τριῶν δοθέντων σημείων μὴ ἐπ' εὐθείαν ὄντων τὸ αὐτό ἐστι τῷ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι. τὸ δὲ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν

μὴ παραλλήλων οὐσῶν, ἀλλὰ τῶν τριῶν συμπιπτουσῶν, τὸ αὐτό ἐστι τῷ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι. τὸ γὰρ δύο παραλλήλων οὐσῶν καὶ μιᾶς ἐμπιπτούσης ὡς μέρος ὂν τῆς β΄. ὑποδιαιρέσεως προγράφεται ἐν τούτοις· πάντα καὶ τὰ ἑξῆς ἓξ ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. Τὰ δὲ λειπόμενα δύο, τὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ κύκλου, ἢ τριῶν δοθέντων κύκλων, μόνον ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ, διὰ τὰς πρὸς ἀλλήλους θέσεις τῶν κύκλων τε καὶ εὐθειῶν πλείονας οὔσας καὶ πλειόνων διορισμῶν δεομένας. ταῖς προειρημέναις ἐπαφαῖς ὁμογενὲς πλῆθός ἐστι προβλημάτων, παραλειπόμενον ἀπὸ τῶν ἀναδιδόντων· προσανέδωκαν δέ τινες προτέρῳ τῶν εἰρημένων δύο βιβλίων· εὐσυνοπτόν γὰρ καὶ εἰσαγωγικὸν μᾶλλον ἦν, ἐντελές τε καὶ συμπληρωτικὸν τοῦ γένους τῶν ἐπαφῶν. πάλιν μιᾷ περιλαβὼν ἅπαντα προτάσει, ἥτις τῆς προειρημένης λείπουσα μὲν ὑποθέσει, περιττεύουσα δὲ ἐπιτάγματι, οὕτως ἔχει. Ἐκ σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων ὁποιωνοῦν δύο δοθέντων κύκλον γράψαι τῷ μεγέθει δοθέντα, διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἢ τῶν δοθέντων παραγινόμενον, εἰ δοθείη, ἐφαπτόμενον δὲ ἑκάστης τῶν δεδομένων γραμμῶν· αὐτὴ περιέχει προβλημάτων ἤδη τὸ πλῆθος ἕξ. ἐκ τριῶν γὰρ διαφόρων τινῶν δυάδες ἄτακτοι διάφοραι γίνονται τὸ πλῆθος ἕξ· ἤτοι γὰρ δύο δοθέντων σημείων, ἢ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἢ δύο δοθέντων κύκλων, ἢ σημείου καὶ εὐθείας, ἢ σημείου καὶ κύκλου, ἢ εὐθείας καὶ κύκλου, τὸν δεδομένον τῷ μεγέθει κύκλον διαγαγεῖν δεῖ, ὡς εἴρηται· καὶ ταῦτα ἀναλῦσαι καὶ συνθεῖναι καὶ διορίζεσθαι κατὰ πτῶσιν. Ἔχει δὲ τὸ πρῶτον τῶν ἐπαφῶν προβλήματα ζ΄. τὸ δὲ δεύτερον προβλήματα δ΄. Λήμματα δὲ ἔχει τὰ δύο βιβλία κα΄. αὐτὰ δὲ θεωρήματά ἐστιν ξ΄.

Περὶ τῶν πορισμάτων Εὐκλείδου.

Μετὰ δὲ τὰς ἐπαφὰς ἐν τρισὶ βιβλίοις πορίσματά ἐστιν Εὐκλείδου, πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν, ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος. Οὐδὲν προστεθείκασι τοῖς ὑπ' Εὐκλείδου γραφεῖσι πρώτου, χωρὶς εἰ μή τινες τῶν πρὸ ἡμῶν ἀπειρόκαλοι δευτέρας γραφὰς ὀλίγοις αὐτῶν παρατεθείκασιν· ἑκάστου μὲν

πλῆθος

πλῆθος ὡρισμένον ἔχοντες ἀποδείξεων, * ὡς ἐδείξαμεν, οὓς δ' ὁ Εὐκλείδης μίαν ἑκάστου θέντος τοῦ μάλιστα ὑπεμφαίνουσαν. Ταῦτα δὲ λεπτὴν καὶ φυσικὴν ἔχει θεωρίαν καὶ ἀναγκαίαν καὶ καθολικωτέραν, καὶ τοῖς δυναμένοις ὁρᾶν καὶ πορίζειν ἐπιτερπῆ. ἅπαντα δὲ αὐτῶν τὰ εἴδη οὔτε θεωρημάτων ἐστὶ οὔτε προβλημάτων, ἀλλὰ μέσην πως τούτων ἐχούσης ἰδέας· ὥστε τὰς προτάσεις αὐτῶν δύνασθαι σχηματίζεσθαι ἢ ὡς θεωρημάτων ἢ ὡς προβλημάτων· παρ' ὃ καὶ συμβέβηκεν, τῶν πολλῶν γεωμετρῶν τοὺς μὲν ὑπολαμβάνειν αὐτὰ εἶναι τῷ γένει θεωρήματα, τοὺς δὲ προβλήματα, ἀποβλέποντας τῷ σχήματι μόνον τῆς προτάσεως. τὰς δὲ διαφορὰς τῶν τριῶν τούτων ὅτι βέλτιον ᾔδεισαν οἱ ἀρχαῖοι, δῆλον ἐκ τῶν ὅρων. ἔφασαν γὰρ θεώρημα μὲν εἶναι τὸ προτεινόμενον εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πρόβλημα δὲ τὸ προβαλλόμενον εἰς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πόρισμα δὲ τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου. μετεγράφη δὲ οὗτος ὁ τοῦ πορίσματος ὅρος ὑπὸ τῶν νεωτέρων, μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν, ἀλλὰ συγχρωμένων τοῖς στοιχείοις τούτοις, καὶ δεικνυόντων αὐτὸ μόνον τοῦθ' ὅτι ἐστὶ τὸ ζητούμενον, μὴ πορίζοντων δὲ τοῦτο· καὶ ἐλεγχόμενοι ὑπὸ τοῦ ὅρου καὶ τῶν διδασκομένων, ἔγραψαν ἀπὸ συμβεβηκότος οὕτως. πόρισμά ἐστι τὸ λεῖπον ὑποθέσει τοπικοῦ θεωρήματος. τούτου δὲ τοῦ γένους τῶν πορισμάτων εἶδός ἐστιν οἱ τόποι, καὶ πλεονάζουσι ἐν τῷ ἀναλυομένῳ· κεχωρισμένον δὲ τῶν πορισμάτων ἤθροισται καὶ ἐπιγράφεται καὶ παραδίδοται, διὰ τὸ πολύχυτον εἶναι μᾶλλον τῶν ἄλλων εἰδῶν. τῶν γοῦν τόπων ἐστὶν ἃ μὲν ἐπιπέδων, ἃ δὲ στερεῶν, ἃ δὲ γραμμικῶν, καὶ ἔτι τῶν πρὸς μεσότητας. Συμβέβηκεν δὲ καὶ τοῦτο τοῖς πορίσμασι, τὰς προτάσεις ἔχειν ἐπιτετμημένας διὰ τὴν σκολιότητα πολλῶν συνήθως συνυπακουομένων, ὥστε πολλοὺς τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ μέρους ἐκδέχεσθαι, τὰ δὲ ἀναγκαιότερα ἀγνοεῖν τῶν σημαινομένων. περιλαβεῖν δὲ πολλὰ μιᾷ προτάσει ἥκιστα δυνατὸν ἐν τούτοις, διὰ τὸ καὶ αὐτὸν Εὐκλείδην οὐ πολλὰ ἐξ ἑκάστου εἴδους τεθεικέναι, ἀλλὰ δείγματος ἕνεκα τῆς πολυπληθίας * ἐνὴ ὀλίγα πρὸς ἀρχὴν. δεδομένον * τοῦ πρώτου βιβλίου τέθεικεν ὁμοειδῆ πᾶν ἐκείνου τοῦ δαψιλεστέρου εἴδους τῶν τόπων, ὡς δέκα * τὸ πλῆθος. Διὸ καὶ περιλαβεῖν ταύτας

ἐν

ἐν μιᾷ προτάσει ἐνδεχόμενον εὑρόντες οὕτως ἐγράψαμεν.

Ἐὰν ὑπτίου ἢ παρυπτίου ἢ παραλλήλου * ἑτέρα τρία τὰ ἐπὶ μιᾶς σημεῖα δεδομένα ᾖ, τὰ δὲ λοιπὰ πλὴν ἑνὸς ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, καὶ τοῦθ' ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. τοῦτ' ἐπὶ τεσσάρων μὲν εὐθειῶν εἴρηται μόνων, ὧν οὐ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰσίν· ἀγνοεῖται δὲ ἐπὶ παντὸς τοῦ προτεινομένου πλήθους ἀληθὲς ὑπάρχον οὕτω λεγόμενον. ἐὰν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ ἐπὶ μιᾶς αὐτῶν δεδομένα ᾖ, καὶ τῶν ἐπὶ ἑτέρας ἕκαστον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας· ἢ καθολικώτερον οὕτως, ἐὰν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ τὰ ἐπὶ μιᾶς αὐτῶν σημεῖα δεδομένα ᾖ, τῶν δὲ λοιπῶν τὸ πλῆθος ἐχόντων τρίγωνον ἀριθμὸν, ἡ πλευρὰ τούτου ἕκαστον ἔχει σημεῖον ἁπτόμενον εὐθείας θέσει δεδομένης, ὧν τριῶν μὴ πρὸς γωνίαν ὑπάρχον τριγώνου χωρίου ἕκαστον λοιπὸν σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. τὸν δὲ στοιχειωτὴν οὐκ εἰκὸς ἀγνοῆσαι τοῦτο, τὴν δ' ἀρχὴν μόνην τάξαι. καὶ ἐπὶ πάντων δὲ τῶν πορισμάτων φαίνεται ἀρχὰς καὶ σπέρματα μόνα πληθῶν πολλῶν καὶ μεγάλων καταβεβληκέναι, ὧν ἕκαστον οὐ κατὰ τὰς τῶν ὑποθέσεων διαφορὰς διαστέλλειν δεῖ, ἀλλὰ κατὰ τὰς τῶν συμβεβηκότων καὶ ζητουμένων· αἱ μὲν ὑποθέσεις ἅπασαι διαφέρουσιν ἀλλήλων εἰδικώταται οὖσαι, τῶν δὲ συμβαινόντων καὶ ζητουμένων ἕκαστον ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὂν πολλαῖς ὑποθέσεσι διαφόροις συμβέβηκε.

Ποιητέον οὖν ἐν μὲν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ ταῦτα τὰ γένη τῶν ἐν ταῖς προτάσεσι ζητουμένων. (ἐν ἀρχῇ μὲν τοῦ ζʹ διάγραμμα τοῦτο) Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖαν κλασθῶσιν, ἀποτέμνῃ δὲ μία ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς τῷ ἐπ' αὐτῆς δεδομένῳ σημείῳ, ἀποτεμεῖ καὶ ἡ ἑτέρα ἀπὸ ἑτέρας λόγον ἔχουσαν δοθέντα. ἐν δὲ τοῖς ἑξῆς, ὅτι τόδε τὸ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης εὐθείας· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς τήνδε δοθείς· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἥδε θέσει δεδομένη ἐστίν· ὅτι ἥδε ἐπὶ δοθὲν νεύει· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε κατηγμένην· ὅτι λόγος τοῦδε τοῦ * χωρίου πρὸς τὸ ὑπὸ δοθεί-

σης

της καὶ τῆσδε· ὅτι τοῦδε τοῦ χωρίου ὃ μὲν τι δοθέν ἐστιν, ὃ δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τόδε τὸ χωρίον, ἢ τόδε μετά τινος χωρίου δοθέντος ἐστιν, * ἐκεῖνο δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἥδε μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα, λόγον ἔχει πρὸς τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ὑπὸ τοῦ δοθέντος καὶ τῆσδε, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δοθέντος καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆσδε καὶ τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι ἥδε ἀποτέμνει ἀπὸ θέσει δεδομένων δοθὲν περιεχούσας.

Εν δὲ τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ ὑποθέσεις μὲν ἕτεραι, τῶνδε ζητουμένων τὰ μὲν πλείονα τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι τόδε τὸ χωρίον ἤτοι λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν, ἢ μετὰ δοθέντος λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶνδε καὶ * συναμφοτέρου τῶνδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ συναμφοτέρου τῆσδέ τε καὶ τῆς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα· καὶ τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ τῆς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα, λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος συναμφοτέρου πρὸς τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι δοθὲν τὸ ὑπὸ τῶνδε.

Εν δὲ τῷ τρίτῳ βιβλίῳ αἱ μὲν πλείονες ὑποθέσεις ἐπὶ ἡμικυκλίων εἰσὶν, ὀλίγαι δὲ ἐπὶ κύκλου καὶ τμημάτων· τῶν δὲ ζητουμένων τὰ μὲν πολλὰ παραπλησίως τοῖς ἔμπροσθεν, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶνδε· ὅτι λόγος τοῦ ἀπὸ τῆσδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶνδε τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ἀπὸ τῆσδε τῷ ὑπὸ δοθέντος καὶ ἀπολαμβανομένης ὑπὸ καθέτου ἕως δοθέντος· ὅτι συναμφότερος καὶ πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἐστί τι δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τόδε δοθὲν περιέξουσι τῷ εἴδει τρίγωνον· ὅτι ἐστί τι δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τόδε ἴσας ἀπολαμβάνουσι περιφερείας· ὅτι ἥδε ἤτοι ἐν παραθέσει ἔσται, ἢ μετά τινος εὐθείας ἐπὶ τὸ δοθὲν νευούσης δοθεῖσαν περιέχει γωνίαν. ἔχει δὲ τὰ τρία βιβλία τῶν πορισμάτων λήμματα λη, αὐτὰ δὲ θεωρημάτων ἐστὶν ροα.

Τόπων ἐπιπέδων β΄.

Τῶν τόπων καθόλου οἱ μέν εἰσιν ἐφεκτικοί, οὓς καὶ Ἀπολλώνιος περὶ τῶν στοιχείων λέγει σημείου μὲν τόπον σημεῖον, γραμμῆς δὲ τόπον γραμμήν, ἐπιφανείας δὲ ἐπιφάνειαν, στερεοῦ δὲ στερεόν· οἱ δὲ διεξοδικοί, ὡς σημείου μὲν γραμμήν, γραμμῆς ἐπιφάνειαν, ἐπιφανείας δὲ στερεόν. οἱ δὲ ἀναστροφικοί, ὡς σημείου μὲν ἐπιφάνειαν, γραμμῆς δὲ στερεόν. τῶν δὲ ἐν τῷ ἀναλυομένῳ, οἱ μὲν τῶν θέσει δεδομένων ἐφεκτικοί εἰσιν· οἱ δὲ ἐπίπεδοι λεγόμενοι, καὶ οἱ στερεοὶ καὶ γραμμικοὶ διεξοδικοί εἰσι σημείων. οἱ δὲ πρὸς ἐπιφανείαις ἀναστροφικοὶ μὲν εἰσὶ σημείων, διεξοδικοὶ δὲ γραμμῶν. οἱ μέν τοι γραμμικοὶ ἀπὸ τῶν πρὸς ἐπιφάνειαν δείκνυνται. λέγονται δὲ ἐπίπεδοι μὲν τόποι οὗτοί τε περὶ ὧν ἐπάγομεν, καθόλου ὅσοι εἰσὶν εὐθεῖαι γραμμαὶ ἢ κύκλοι· στερεοὶ δὲ, ὅσοι εἰσὶ κώνων τομαί, παραβολαὶ ἢ ἐλλείψεις, ἢ ὑπερβολαί. γραμμικοὶ δὲ τόποι λέγονται ὅσαι γραμμαί εἰσιν οὔτε εὐθεῖαι, οὔτε κύκλοι, οὔτε τις τῶν εἰρημένων κωνικῶν τομῶν. οἱ δὲ ὑπὸ Ἐρατοσθένους ἐπιγραφέντες τόποι πρὸς μεσότητας, ἐκ τῶν προειρημένων εἰσὶ τῷ γένει· ἀπὸ δὲ τῆς ἰδιότητος τῶν ὑποθέσεων * ἐκείνοις. οἱ μὲν οὖν ἀρχαῖοι τῶν ἐπιπέδων τόπων τούτων τάξιν ἀποβλέποντες ἐστοιχείωσαν· ἧς ἀμελήσαντες οἱ μετ' αὐτοὺς προσέθηκαν ἑτέρους, ὡς οὐκ ἀπείρων τὸ πλῆθος ὄντων, εἰ θέλοι τις προσγράφειν οὐ τῆς τάξεως ἐκείνης ἐχόμενα. θήσω οὖν τὰ μὲν προσκείμενα ὕστερα, τὰ δὲ τῆς τάξεως πρότερα, μιᾷ περιλαβὼν προτάσει ταύτῃ. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι, ἤτοι ἀπὸ ἑνὸς δεδομένου σημείου ἢ ἀπὸ δύο, καὶ ἤτοι ἐπ' εὐθείας ἢ παράλληλοι, ἢ δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, καὶ ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας, ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον· ἅπτηται δὲ τὸ τῆς μιᾶς πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου, ἅψεται καὶ τὸ τῆς ἑτέρας πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου, ὅτε μὲν τοῦ ὁμογενοῦς, ὅτε δὲ τοῦ ἑτέρου· καὶ ὅτε μὲν ὁμοίως κειμένου πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ὅτε δὲ ἐναντίως· ταῦτα δὲ γίνεται παρὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὑποκειμένων· τὰ δὲ προσκείμενα ἐν ἀρχῇ ὑπὸ Χαρμάνδρου γ΄ συμφρονεῖ ταῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης τὸ ἓν πέρας ᾖ δεδομένον, τὸ ἕτερον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης.

κοίλης. Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. Ἐὰν τριγώνου χωρίου μεγέθει δεδομένου ἡ βάσις θέσει καὶ μεγέθει δεδομένη ᾖ, ἡ κορυφὴ αὐτοῦ ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. ἕτερα δὲ τοιαῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης, καὶ παρά τινα θέσει δεδομένην εὐθεῖαν ἠγμένης, τὸ ἓν πέρας ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ἅψεται καὶ τὸ ἕτερον εὐθείας δεδομένης. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας δύο εὐθείας, παραλλήλας ἢ συμπιπτούσας, καταχθῶσιν ἐν δεδομέναις γωνίαις ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον· ἢ ὧν ἡ μία, μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἡ ἑτέρα λόγον ἔχει δοθέντα, δεδομένη ἐστ' ἅψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν ὦσιν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι θέσει δεδομέναι, καὶ ἐπ' αὐτὰς ἀπό τινος σημείου καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ κατηγμένης, μετὰ τοῦ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, καὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας παραλλήλους καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας, ἤτοι λόγον ἐχούσας δοθέντα [ἢ χωρίον περιεχούσας δεδομένον, ἢ ὥστε τὰ ἐπ' αὐτῶν τῶν κατηγμένων δεδομένα εἴδη, ἢ τὴν ὑπεροχὴν τῶν εἰδῶν ἴσην εἶναι δεδομένῳ χωρίῳ] τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας.

Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τάδε. Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσι, καὶ ᾖ τὰ ἀπ' αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἤτοι εὐθείας ἢ περιφερείας. Ἐὰν ᾖ θέσει δεδομένη εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον, καὶ ἀπὸ τούτου διαχθεῖσά τις πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην, καὶ ᾖ τὸ ἀπὸ τῆς διαχθείσης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἧς ἀπολαμβάνει, ἤτοι πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, ἢ πρὸς ἑτέρῳ δοθέντι σημείῳ ἐπὶ τῆς θέσει δεδομένης, τὸ πέρας τῆσδε ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶ-

ϛιν, καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς μιᾶς τοῦ ἀπὸ τῆς ἑτέρας δοθέντι μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας· Ἐὰν ἀπὸ ὁσωνοῦν δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ἑνὶ σημείῳ, καὶ ἡ τὰ ἀπὸ πασῶν εἴδη ἴσα δοθέντι χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου παρὰ θέσει ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολαμβανομένη ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς δοθέντι σημείῳ· καὶ ἡ τὰ ἀπὸ τῶν κεκλασμένων εἴδη ἴσα τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, τὸ πρὸς τῇ κλάσει σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἐντὸς κύκλου θέσει δεδομένου δοθέν τι σημεῖον ᾖ, καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς· καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς ἄχρι τοῦ δοθέντος ἐντὸς σημείου, ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, ἢ τῷ μόνῳ, ἢ τούτῳ τε καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐντὸς δύο τμημάτων, τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν τοῦτο μὲν σημεῖον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ὁ δὲ κύκλος μὴ ὑπόκειται, τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ δεδομένου σημεῖα ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας τῆς αὐτῆς. ἔχει δὲ τὰ τόπων ἐπιπέδων δύο βιβλία θεωρήματα ἤτοι διαγράμματα ρμζ, λήμματα δὲ ὀκτώ.

Νεύσεων δύο.

Νεύειν λέγεται γραμμὴ ἐπὶ σημεῖον, ἐὰν ἐπεκβαλλομένη ἐπ' αὐτὸ παραγίνηται. καθόλου δὲ τὸ αὐτό ἐστιν, ἐάν τε ἐπὶ δοθὲν νεύειν σημεῖον λέγηται· ἐάν τε ἐστί τι ἐπ' αὐτῆς δοθέν· ἐάν τε διὰ δοθέντος ἐστὶ σημείου. Ἐπέγραψαν δὲ ταῦτα Νεύσεις ἀφ' ἑνὸς τῶν εἰρημένων. Προβλήματος δὲ ὄντος καθολικοῦ τούτου. δύο δοθεισῶν γραμμῶν θέσει, θεῖναι μεταξὺ τούτων εὐθεῖαν τῷ μεγέθει δεδομένην, νεύουσαν ἐπὶ δοθὲν σημεῖον. ἐπὶ ταύτης τῶν ἐπὶ μέρους διάφορα τὰ ὑποκείμενα ἐχόντων, ἃ μὲν ἦν ἐπίπεδα, ἃ δὲ στερεά, ἃ δὲ γραμμικά. τῶν δ' ἐπιπέδων ἀποκληρώσαντες τὰ πρὸς πολλὰ χρησιμώτερα, ἔδειξαν προβλήματα ταῦτα. Θέσει δεδομένων ἡμικυκλίου τε καὶ εὐθείας πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, ἢ δύο ἡμικυκλίων ἐπ' εὐθείας ἐχόντων τὰς βάσεις, θεῖναι

δοθεῖσαν

δοθείσαν τῷ μεγέθει εὐθεῖαν μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν, νεύουσαν ἐπὶ γωνίαν ἡμικυκλίου. καὶ ῥόμβου δοθέντος, καὶ ἐπεκβεβλημένης μόνης μιᾶς πλευρᾶς, ἁρμόσαι ὑπὸ τὴν ἐκτὸς γωνίαν δεδομένην τῷ μεγέθει εὐθεῖαν νεύουσαν ἐπὶ τὴν ἀντικρὺς γωνίαν. καὶ θέσει δοθέντος κύκλου ἐναρμόσαι εὐθεῖαν μεγέθει δεδομένην νεύουσαν ἐπὶ δοθέν. τούτων δὲ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ τεύχει δέδεικται, τὸ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἡμικυκλίου καὶ εὐθείας, ἔχον πτώσεις τέσσαρας, καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἔχον πτώσεις δύο, καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ῥόμβου πτώσεις ἔχον δύο. Εν δὲ τῷ δευτέρῳ τεύχει, τὸ ἐπὶ τῶν δύο ἡμικυκλίων, τῆς ὑποθέσεως πτώσεις ἐχούσης δέκα· ἐν δὲ ταύταις ὑποδιαιρέσεις πλείονες διοριστικαί, ἕνεκα τοῦ δεδομένου μεγέθους τῆς εὐθείας. Τὰ μὲν οὖν ἐν τῷ ἀναλυομένῳ τόπῳ ἐπίπεδα, τοῦτ' ἔστιν ἃ καὶ πρότερα δείκνυται, χωρὶς τῶν Ερατοσθένους μεσοτήτων· ὕστατα γὰρ ἐκεῖνα. τοῖς δὲ ἐπιπέδοις ἐφεξῆς τὴν τῶν στερεῶν ἡ τάξις ἀπαιτεῖ θεωρίαν. Στερεὰ δὲ καλοῦσι προβλήματα, οὐχ ὅσα ἐν στερεοῖς σχήμασι προτείνεται, ἀλλ' ὅσα διὰ τῶν ἐπιπέδων μὴ δυνάμενα δειχθῆναι, διὰ τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν δείκνυται. ὥστε ἀναγκαῖον πρότερον περὶ τούτων γράφειν. τὴν μὲν οὖν ἀναδιδομένων κωνικῶν στοιχείων πρότερον Αρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου πέντε τεύχη, ὡς ἂν τοῖς ἤδη δυνατοῖς οὖσι ταῦτα παραλαμβάνειν ἐπιτομώτερον γεγραμμένα. ἔχει δὲ τὰ τῶν νεύσεων βιβλία δύο θεωρήματα ἤτοι διαγράμματα ρκε', λήμματα δὲ λη'.

Κωνικῶν η'.

Τὰ Εὐκλείδου βιβλία δ' κωνικῶν Απολλώνιος ἀναπληρώσας καὶ προσθεὶς ἕτερα δ', παρέδωκεν η' κωνικῶν τεύχη. Αρισταῖος δέ, ὃς γράφει τὰ μέχρι τοῦ νῦν ἀναδιδόμενα στερεῶν τόπων τεύχη ε' συνεχῆ τοῖς κωνικοῖς, ἐκάλει, καὶ οἱ πρὸ Απολλωνίου, τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν, τὴν μὲν ὀξυγωνίου, τὴν δὲ ὀρθογωνίου, τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου κώνου τομήν. ἐπειδὴ ἐν ἑκάστῳ τῶν τριῶν τούτων κώνων διαφόρως τεμνουμένων αἱ τρεῖς γίγνονται γραμμαί· διαπορήσας, ὡς φαίνεται, Απολλώνιος τί δή ποτε ἀποκληρώσαιντο οἱ πρὸ αὐτοῦ, ἣν μὲν ἐκάλουν ὀξυγωνίου κώνου τομὴν δυναμένην καὶ ὀρθογωνίου καὶ ἀμβλυγωνίου εἶναι.

εἶναι· ἣν δὲ ὀρθογωνίου, εἶναι δυναμένην ὀξυγωνίου τε καὶ ἀμβλυγωνίου· ἣν δὲ ἀμβλυγωνίου δυναμένην εἶναι ὀξυγωνίου τε καὶ ὀρθογωνίου· μεταθεὶς τὰ ὀνόματα καλεῖ τὴν μὲν ὀξυγωνίου καλουμένην Ἔλλειψιν, τὴν δὲ ὀρθογωνίου Παραβολήν, τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου Ὑπερβολήν, ἑκάστην δὲ ἀπό τινος ἰδίου συμβεβηκότος. χωρίον γάρ τι παρά τινα γραμμὴν παραβαλλόμενον, ἐν μὲν τῇ ὀξυγωνίου κώνου τομῇ ἐλλεῖπον γίνεται τετραγώνῳ· ἐν δὲ τῇ ὀρθογωνίου οὔτε ἐλλεῖπον οὔθ' ὑπερβάλλον. τοῦτο δ' ἔπαθεν μὴ προσνοήσας ὅτι, κατά τινα μίαν πλῶσιν τοῦ ἐπιπέδου τέμνοντος τὸν κῶνον, ἄλλη καὶ ἄλλη τῶν γραμμῶν γίνεται, ἣν ὠνόμασεν ἀπὸ τῆς ἰδιότητος τοῦ κώνου. ἐὰν γὰρ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀχθῇ παράλληλον μιᾷ τοῦ κώνου πλευρᾷ, γίγνεται μία μόνη τῶν τριῶν γραμμῶν, ἀεὶ ἡ αὐτή, ἣν ὠνόμασεν ὁ Ἀρισταῖος ἐκεῖνος τοῦ τμηθέντος κώνου τομήν. ὁ δ' οὖν Ἀπολλώνιος οἷα περιέχει τὰ ὑπ' αὐτοῦ γραφέντα κωνικῶν η' βιβλία λέγει, κεφαλαιώδη θεὶς προεδήλωσεν ἐν τῷ προοιμίῳ τοῦ πρώτου ταυτήν. "περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων, καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπὶ πλεῖον, καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξητασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα. τὸ δὲ δεύτερον τὰ περὶ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων συμβαίνοντα, καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρείαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς. τίνας δὲ διαμέτρους ἢ τίνας ἄξονας καλῶ, εἰδήσεις ἐκ τούτου τοῦ βιβλίου. τὸ δὲ τρίτον, πολλὰ καὶ παντοῖα θεωρήματα χρήσιμα πρός τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων, καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλείονα καλὰ καὶ ξένα. ἃ καὶ κατανοήσαντες εὕρομεν μὴ συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ γ' καὶ δ' γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριόν τι αὐτοῦ, καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ δυνατὸν ἄνευ τῶν προσευρημένων τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ τέταρτον, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμπίπτουσι· καὶ ἄλλα ἐκ περισσοῦ, ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται. κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλει. καὶ ἔτι ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσιν. τὰ δὲ λοιπὰ δ' περιουσιαστικώτερα· ἔστι γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπὶ πλεῖον· τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων τομῶν· τὸ δὲ διοριστι-

διοριστικῶν θεωρημάτων· τὸ δὲ κωνικῶν προβλημάτων διωρισμένων". Ἀπολλώνιος μὲν ταῦτα. ὃν δέ φησιν ἐν τῷ τρίτῳ τόπον ἐπὶ γ' καὶ δ' γραμμὰς μὴ τελειωθῆναι ὑπὸ Εὐκλείδου, οὐδ' ἂν αὐτὸς ἐδυνήθη, οὐδ' ἄλλος οὐδείς, ἀλλ' οὐδὲ μικρόν τι προσθεῖναι τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γραφεῖσι, διά γε μόνων τῶν προδεδειγμένων ἤδη κωνικῶν, ἄχρι τῶν κατ' Εὐκλείδην· ὡς καὶ αὐτὸς μαρτυρεῖ λέγων ἀδύνατον εἶναι τελειωθῆναι χωρὶς ὧν αὐτὸς προγράφειν ἠναγκάσθη. ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀποδεχόμενος τὸν Ἀρισταῖον, ἄξιον ὄντα ἐφ' οἷς ἤδη παραδέδωκε κωνικοῖς· καὶ μὴ φθάσας ἢ μὴ θελήσας ἐπικαταβάλλεσθαι τούτων τὴν αὐτὴν πραγματείαν (ἐπιεικέστατος ὢν, καὶ πρὸς ἅπαντας εὐμενὴς τοὺς καὶ κατὰ ποσὸν συναύξειν δυναμένους τὰ μαθήματα, ὡς δεῖ, καὶ μηδαμῶς προσκρουστικὸς ὑπάρχων, καὶ ἀκριβὴς μὲν, οὐκ ἀλαζονικὸς δὲ καθάπερ οὗτος) ὅσον δυνατὸν ἦν δεῖξαι τοῦ τόπου διὰ τῶν ἐκείνου κωνικῶν ἔγραψεν, οὐκ εἰπὼν τέλος ἔχειν τὸ δεικνύμενον, τότε γὰρ ἦν ἀναγκαῖον ἐξελέγχειν· νῦν δὲ οὐδαμῶς. ἐπεί τοι καὶ αὐτὸς ἐν τοῖς κωνικοῖς ἀτελῆ τὰ πλεῖστα καταλιπὼν οὐκ εὐθύνεται. προσθεῖναι δὲ τῷ τόπῳ τὰ λειπόμενα δεδύνηται, προφαντασιωθεὶς τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γεγραμμένοις ἤδη περὶ τοῦ τόπου, καὶ σχολάσας τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου μαθηταῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ πλεῖστον χρόνον, (ὅθεν ἔσχεν καὶ τὴν τοσαύτην ἕξιν) * οὐκ ἂν πάθη. οὗτος δὲ ὁ ἐπὶ γ' καὶ δ' γραμμὰς τόπος, ἐφ' ᾧ μεγαφρονεῖ προσθεὶς, χάριν ὀφείλων εἰδέναι τῷ πρώτῳ γράψαντι, τοιοῦτός ἐστι.

Ἐὰν γὰρ θέσει δεδομένων τριῶν εὐθειῶν, ἀπό τινος τοῦ αὐτοῦ σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὰς τρεῖς ἐν δεδομέναις γωνίαις εὐθεῖαι· καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ δύο κατηγμένων περιεχομένου ὀρθογωνίου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τετράγωνον, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένου στερεοῦ τόπου, τουτέστι μιᾶς τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν. καὶ ἐὰν ἐπὶ δ' εὐθείας θέσει δεδομένας καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ δύο κατηγμένων, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο κατηγμένων, ὁμοίως τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης κώνου τομῆς. Ἐὰν μὲν γὰρ ἐπὶ δύο μόνας, ἐπίπεδος ὁ τόπος δέδεικται. Ἐὰν δὲ ἐπὶ πλείονας τεσσάρων, ἅψεται τὸ σημεῖον τόπων οὐκέτι γνωρίμων,

γνωρίμων, ἀλλὰ γραμμῶν μόνον λεγομένων, ποδαπῶν δὲ, ἢ τίνα ἐχουσῶν ἴδια οὐκέτι*· ὧν μίαν, οὐδὲ τὴν πρώτην καὶ συμφανεστάτην εἶναι δοκοῦσαν, συντεθείκασιν, ἀναδείξαντες χρησίμην οὖσαν. αἱ δὲ προτάσεις αὐτῶν εἰσίν.

Εαν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας εὐθείας πέντε καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ λόγος ᾖ δεδομένος τοῦ ὑπὸ τριῶν κατηγμένων περιεχομένου στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ὀρθογωνίου, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο κατηγμένων καὶ δοθείσης τινὸς περιεχόμενον παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον, ἅψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης γραμμῆς. Εάν τε ἐπὶ ἕξ, καὶ λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν περιεχομένου καὶ εἰρημένου στερεοῦ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν τριῶν, πάλιν τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης. Εάν τε ἐπὶ πλείονας τῶν ἕξ, οὐκέτι μὲν ἔχουσι λέγειν, λόγος ᾖ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ τῶν δ΄ περιεχομένου τινὸς πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν, ἐπεὶ οὐκ ἔστι τι περιεχόμενον ὑπὸ πλειόνων ἢ τριῶν διαστάσεων. συγκεχωρήκασι δὲ ἑαυτοῖς οἱ βραχὺ πρὸ ἡμῶν ἑρμηνεύειν τὰ τοιαῦτα, μὴ δὲ ἓν μηδαμῶς διαληπτὸν σημαίνοντες· τὸ ὑπὸ τῶν δ΄ περιεχόμενον λέγοντες, ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῆσδε τετράγωνον, ἢ ἐπὶ τὸ ὑπὸ τῶν δ΄. παρῆν δὲ διὰ τῶν συνημμένων λόγων ταῦτα καὶ λέγειν καὶ δεικνύναι καθόλου, καὶ ἐπὶ τῶν προειρημένων προτάσεων καὶ ἐπὶ τούτων τὸν τρόπον τοῦτον. Εαν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ δεδομένος ᾖ ὁ λόγος ὁ συνημμένος ἐξ οὗ ἔχει μία κατηγμένη πρὸς μίαν κατηγμένην, καὶ ἑτέρα πρὸς ἑτέραν, καὶ ἄλλη πρὸς ἄλλην, καὶ ἡ λοιπὴ πρὸς δοθεῖσαν, ἐὰν ὦσιν ζ΄· ἐὰν δὲ η΄, καὶ ἡ λοιπὴ πρὸς λοιπήν· τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης γραμμῆς. καὶ ὁμοίως ὅσαι ἂν ὦσιν περισσαὶ ἢ ἄρτιοι τὸ πλῆθος· τούτων ὡς ἔφην ἑπομένων τῷ ἐπὶ δ΄ τόπῳ· οὐδὲ ἓν οὖν τεθείκασιν ὥστε τὴν γραμμὴν εἰδέναι. τοῦθ᾽ οἱ βλέποντες ἥκιστα ἐπαίρονται, καθάπερ οἱ πάλαι καὶ τῶν τὰ κρείττονα γραψάντων ἕκαστος. ἐγὼ δὲ καὶ πρὸς ἀρχαῖς ἐπὶ τῶν μαθημάτων καὶ τῶν ὑπὸ φύσεως προκειμένης ζητημάτων ὕλης κινουμένους ὁρῶν ἅπαντας, αἰδούμενος ἐγὼ καὶ δείξας γε πολλῷ κρείσσονα καὶ πολλὴν προφερόμενα ὠφέλειαν*. ἵνα δὲ μὴ κεναῖς χερσὶ τοῦτο φθεγξάμενος ὧδε χωρισθῶ τοῦ λόγου, ταῦτα δώσω τοῖς ἀγνοοῦσιν.

 O μὲν

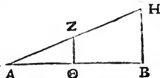
Ο μὲν τῶν τελείων ἀμφοιστικῶν λόγος συνῆπται, ἔκ τε τῶν ἀμφοισμάτων, καὶ τῶν ἐπὶ τοὺς ἄξονας ὁμοίως κατηγμένων εὐθειῶν ἀπὸ τῶν ἐν αὐτοῖς κεντροβαρικῶν σημείων. Ο δὲ τῶν ἀτελῶν ἔκ τε τῶν ἀμφοισμάτων καὶ τῶν περιφερειῶν, ὅσας ἐποίησε τὰ ἐν αὐτοῖς κεντροβαρικὰ σημεῖα. Ο δὲ τούτων περιφερειῶν, δῆλον ὡς ἔκ τε τῶν κατηγμένων, καὶ ὧν περιέχουσιν αἱ τούτων ἄκραι, εἰ καὶ εἶεν πρὸς τοῖς ἄξοσιν ἀμφοιστικῶν, γωνιῶν.

Περιέχουσι δὲ αὗται αἱ προτάσεις, σχεδὸν οὖσαι μία, πλεῖστα ὅσα καὶ παντοῖα θεωρήματα γραμμῶν τε καὶ ἐπιφανειῶν καὶ στερεῶν, πάνθ' ἅμα καὶ μιᾷ δείξει· καὶ τὰ μὴ προδεδειγμένα καὶ τὰ ἤδη, ὡς καὶ τὰ ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν στοιχείων. ἔχει δὲ τὰ η' βιβλία τῶν Απολλωνίου κωνικῶν θεωρήματα, ἤτοι διαγράμματα υπζ'· λήμματα δέ, ἤτοι λαμβανόμενα, ἐστιν εἰς αὐτὰ ο'.

Πάππȣ Λήμματα εἰς τὰ λόγου καὶ χωρίȣ ἀποτομῆς.

α΄. ΤΗΝ δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν.

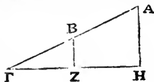
Εςω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ὁ ᾗ δοθεὶς λόγος ὁ τȣ̃ Γ πρὸς Δ, καὶ δέον ἔςω τεμεῖν τὴν ΑΒ εἰς τὸν τȣ̃ Γ πρὸς τὴν Δ λόγον. ἐκλινα πρὸς τὴν ΑΒ εὐθεῖαν γωνίαν τυχȣ́σῃ εὐθεῖαν τὴν ΑΗ· καὶ τῇ μὲν Γ ἴσην ἀφεῖλον τὴν ΑΖ, τῇ δὲ Δ τὴν ΖΗ· καὶ ἐπιζεύξας τὴν ΒΗ ταύτῃ παράλληλον ἤγαγον τὴν ΖΘ. ἐπεὶ



ȣ̓͂ν ἐςιν ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ, ȣ̔́τως ἡ ΑΖ πρὸς ΖΗ, ἴση δέ ἐςιν ἡ μὲν ΑΖ τῇ Γ, ἡ δὲ ΖΗ τῇ Δ· ἔςιν ἄρα ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ ȣ̔́τως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. διῄρηται ἄρα κατὰ τὸ Θ σημεῖον.

β΄. Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, Δ, εὑρεῖν ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ ȣ̔́τως ἄλλην τινὰ πρὸς τὴν Δ.

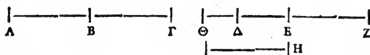
Πάλιν ἔκλινά τινα εὐθεῖαν τὴν ΓΗ ἐν τυχȣ́σῃ γωνίᾳ, καὶ τῇ Δ ἴσην ἀπεθέμην τὴν ΓΖ· ἐπέζευξα τὴν ΒΖ, καὶ ταύτῃ παράλληλον ἤγαγον τὴν ΑΗ. γίνεται ȣ̓͂ν πάλιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ ȣ̔́τως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΓΖ, τȣτέςι πρὸς τὴν Δ. εὕρηται ἄρα ἡ ΖΗ. ὁμοίως κἂν ἡ τρίτη δοθῇ, τὴν τετάρτην εὑρήσομεν.



γ΄. Εχέτω τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι καὶ κατὰ σύνθεσιν, τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ.

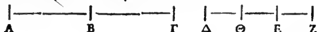
Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ȣ̔́τως ἄλλό τι τὸ Η πρὸς

πρὸς τὸ ΕΖ· καὶ τὸ Η ἄρα πρὸς τὸ ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· μεῖζον ἄρα ἐστὶν τὸ Η τοῦ ΔΕ. κείσθω αὐτῷ ἴσον τὸ ΘΕ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτω τὸ ΘΕ πρὸς ΕΖ, τὸ δὲ ΘΖ πρὸς τὸ ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΕΖ· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ.



δ'. Πάλιν δὴ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ· ὅτι καὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΕΖ.

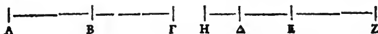
Πάλιν γὰρ ἐπεὶ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ, ἐὰν ποιῶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ΕΖ, ἔσται ἔλασσον τοῦ ΔΕ. ἔστω δὲ τὸ ΕΘ· γίνεται ἄρα καὶ ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ οὕτω τὸ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΕ. τὸ δὲ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ· τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ.



ε'. Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι καὶ ἐναλλὰξ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ΕΖ· φανερὸν δὴ ὅτι μεῖζον ἔσται τοῦ ΔΕ. ἔστω τὸ ΗΕ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΗΕ οὕτω τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΗΕ, τουτέστι ἤπερ τὸ ΒΓ πρὸς ΕΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ. τὰ δ' αὐτὰ κἂν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ὅτι καὶ ἐναλλάξ. ἔσται γὰρ καὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ

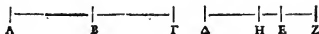
ὕτως ἄλλό τι πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι πρὸς ἐλάσσονα ἢ ΔΕ. τὰ λοιπὰ τὰ αὐτά.



ς'. Τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ· ὅτι ἀναστρέψαντι τὸ ΓΑ πρὸς ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΕ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ ὕτω τὸ ΔΖ πρὸς ἄλλό τι· ἔσται δὴ πρὸς ἔλασσον τῦ ΖΕ. ἔσω πρὸς τὸ ΖΗ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐσὶν ὡς τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΑΒ ὕτω τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ. τὸ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΕ. Ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΔΕ. ἔσται γὰρ ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ ὕτω τὸ ΔΖ πρὸς μεῖζόν τι μέγεθος τῦ ΖΕ. καὶ τὰ λοιπὰ φανερά.

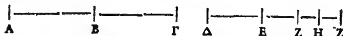




ζ'. Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι ἀνάπαλιν τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΔ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ὕτως τὸ ΔΕ πρός τι· ἔσται δὴ πρὸς ἔλασσον τῦ ΕΖ, ὥστε πρὸς τὸ ΕΗ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐσὶ ὡς τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ ὕτω τὸ ΗΕ πρὸς τὸ ΕΔ. τὸ δὲ ΗΕ πρὸς ΕΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΕ πρὸς ΕΔ. Ὁμοίως δὲ κἂν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ, ἀνάπαλιν τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ μείζονα

ζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ζ Ε πρὸς Ε Δ. ἔςαι γὰρ ὡς τὸ Α Β πρὸς τὸ Β Γ οὕτω τὸ Δ Ε πρὸς μεῖζόν τι τοῦ Ε Ζ. τὰ δὲ λοιπὰ φανερά. καὶ φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι ἐὰν τὸ Α Β πρὸς τὸ Β Γ μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ Δ Ε πρὸς Ε Ζ, καὶ τὸ Ζ Ε πρὸς τὸ Ε Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ Β πρὸς τὸ Β Α. ἐὰν δὲ τὸ Α Β πρὸς τὸ Β Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ Δ Ε πρὸς τὸ Ε Ζ, καὶ τὸ Ζ Ε πρὸς τὸ Ε Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ Β πρὸς τὸ Β Α.



η'. Ἐχέτω δὲ Α Β πρὸς τὸ Δ Ε μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Β Γ πρὸς τὸ Ε Ζ· ὅτι καὶ τὸ Α Β πρὸς τὸ Δ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Α Γ πρὸς τὸ Δ Ζ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ Α Β πρὸς τὸ Δ Ε οὕτω τὸ Β Γ πρός τι. ἔςαι δὲ πρὸς ἔλασσον τοῦ Ε Ζ. ἔςω πρὸς τὸ Η Ε, καὶ ὅλη ἄρα ἡ Α Γ πρὸς ὅλην τὴν Δ Η ἐςὶν ὡς ἡ Α Β πρὸς τὴν Δ Ε· ἡ δὲ Α Γ πρὸς τὴν Δ Η μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν Δ Ζ· καὶ ἡ Α Β ἄρα πρὸς τὴν Δ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Α Γ πρὸς τὴν Δ Ζ. καὶ φανερὸν ὅτι ὅλη ἡ Α Γ πρὸς ὅλην τὴν Δ Ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Α Β πρὸς τὸ Δ Ε· κἂν ἐλάσσων τοῦ μέρους, μείζων ὅλης.



θ'. Ἐχέτω δὴ πάλιν ὅλη ἡ Α Γ πρὸς ὅλην τὴν Δ Ζ μείζονα λόγον ἤπερ ἡ Α Β πρὸς τὴν Δ Ε· ὅτι καὶ λοιπὴ ἡ Β Γ πρὸς λοιπὴν τὴν Ε Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Α Γ πρὸς τὴν Δ Ζ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ Α Γ πρὸς τὴν Δ Ζ οὕτως ἡ Α Β πρὸς τὴν Δ Η· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ Β Γ πρὸς λοιπὴν τὴν Η Ζ ἐςὶν ὡς ἡ Α Γ πρὸς τὴν Δ Ζ. ἡ δὲ Β Γ πρὸς τὴν Ε Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν Ζ Η· καὶ Β Γ ἄρα πρὸς τὴν Ε Ζ μείζονα λόγον ἔχει

ἔχει ἤπερ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. ἐὰν ᾖ ὅλης πρὸς τὴν ὅλην ἐλάσσων, τῆς λοιπῆς ἐλάσσων.



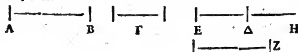
ι΄. Ἔστω μεῖζον μὲν τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ Δ τῷ Ε· ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε.

Κείσθω γὰρ τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΖ πρὸς τὸ Γ οὕτω τὸ Δ πρὸς τὸ Ε. ἀλλὰ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΖ πρὸς τὸ Γ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε. καὶ φανερὸν ὅτι ἂν ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ Γ, τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, διὰ τὸ ἀνάπαλιν.



ια΄. Ἀλλὰ ἔστω μεῖζον μὲν τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἔλασσον δὲ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ.

Φανερὸν μὲν οὖν ἐστι ἄνευ ἀποδείξεως. εἰ γὰρ ὄντος ἴσου τοῦ ΔΕ τῷ Ζ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ἐλάσσονος ὄντος πολλῷ μείζονα λόγον ἕξει. δι᾽ ἀποδείξεως δὲ οὕτως. Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἐὰν ποιῶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ οὕτως ἄλλό τι πρὸς τὸ Ζ, ἔσται μεῖζον τοῦ Ζ, ὥστε καὶ τοῦ ΔΕ. ἔστω οὖν αὐτῷ ἴσον τὸ ΗΕ· τὸ ΗΕ ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΗΕ πρὸς τὸ Ζ, οὕτω τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ. καὶ φανερὸν ὅτι ὅπου τὸ ἔλασσον ἀεὶ ἐλάσσονα. καὶ ὅτι μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ τοῦ ὑπὸ τῶν Γ, ΔΕ· ἴσον γὰρ αὐτῷ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν Γ, ΕΗ, ὅ ἐστι μεῖζον τοῦ ὑπὸ τῶν Γ, ΔΕ.



ιβ΄. Εὐ-

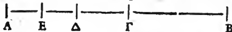
ιβ'. Εὐθεῖα ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ· ὅτι πάντα μὲν τὰ μεταξὺ τῶν ΑΓ σημείων εἰς ἐλάσσονας λόγους διαιρεῖ τὴν ΑΒ ἢ τὸ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, πάντα δὲ τὰ μεταξὺ τῶν ΓΒ εἰς μείζονας.

Εἰλήφθω γὰρ σημεῖα ἐφ' ἑκατέρα τοῦ Γ τὰ Δ, Ε. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων μὲν ἡ ΔΑ τῆς ΑΓ, μείζων δὲ ἡ ΔΒ τῆς ΒΓ, ἡ ΔΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν ΑΓ ἤπερ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΓΒ· καὶ ἐναλλὰξ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΒΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν Α, Γ σημείων. Πάλιν, ἐπεὶ μείζων μέν ἐστιν ἡ ΕΑ τῆς ΑΓ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΕΒ τῆς ΒΓ· ἡ ΕΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἐναλλὰξ ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν μεταξὺ τῶν Γ, Β λαμβανομένων σημείων.



ιγ'. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τμηθῇ δίχα κατὰ τὸ Γ, πάντων τῶν λαμβανομένων σημείων μέγιστον ἀποτέμνει τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ τὸ Γ σημεῖον.

Ἐὰν γὰρ ληφθῇ σημεῖον τὸ Δ, γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ. τὰ δὲ αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα.

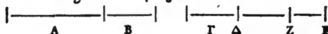


ιδ'. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἀεὶ τὸ ἔγγιον τοῦ Γ τοῦ ἀπωτέρου μεῖζον χωρίον ποιεῖ. Εἰλήφθω γὰρ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ Ε μεταξὺ τῶν ΑΔ. Δεικτέον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ, ὧν τὸ ἀπὸ ΔΓ ἔλασ-

σύν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῆς ΑΕΒ.

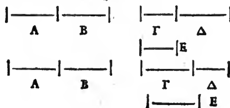
κε′. Εἰ γὰρ εἴη τὸ Α μετὰ τοῦ Β ἴσον τῷ Γ μετὰ τοῦ ΔΕ, καὶ ἔλασσον τὸ Β τοῦ ΔΕ· μεῖζον ἂν γένοιτο τὸ Α τοῦ Γ.

Κείσθω γὰρ τῷ Β ἴσον τὸ ΔΖ· τὸ Α ἄρα μετὰ τοῦ ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΕ μετὰ τοῦ Γ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ Α ἴσον ἐστὶ τοῖς Γ καὶ ΖΕ, ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ.



κς′. Η Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ.

Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· καὶ ἡ Γ ἄρα πρὸς τὴν Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν Δ· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶ ἡ Ε τῆς Δ, καὶ κοινὸν ὕψος ἡ Α. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΑ τοῦ ὑπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓ· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ. Ομοίως καὶ ἐὰν ἐλάσσων ὁ λόγος γένηται, ἔλασσον καὶ τὸ χωρίον τοῦ χωρίου. Ἀλλὰ δὴ ἔστω πάλιν μεῖζον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ὅτι ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. Κείσθω γὰρ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ· γίνεται ἄρα μεῖζον μὲν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ὥστε καὶ ἡ Ε τῆς Γ μείζων. ὡς δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Δ. ἡ δὲ Ε πρὸς τὴν Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β. ὁμοίως καὶ ἀναστρέψαντι.



κζ′. Δύο

ιζ. Δύο εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΑΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΓΕ ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ ΑΒΓ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΕ ὑπερέχει τῇ ΓΕ, ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΕ· συναμφότερος δὲ ἡ ΑΒΕ δύο εἰσὶν αἱ ΒΔ, δύο δὲ αἱ ΒΔ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.



ιη. Ἔστω δὲ πάλιν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΓΕ σύγκειται ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΕ ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ΓΔ, ΔΕ· ἴση δέ ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΔΕ· ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΓ, τουτέστιν ἐκ συναμφοτέρου τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ δύο τῶν ΒΔ· δύο δὲ αἱ ΒΔ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.



ιθ. Πάλιν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΓΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΑΕ ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ ΑΒΓ συναμφοτέρου τῆς ΕΒΓ ὑπερέχει τῇ ΑΕ, συναμφότερος δὲ ἡ ΕΒΓ, δύο εἰσὶν αἱ ΒΔ, τουτέστιν ἡ δυναμένη τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΑΕ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ

ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ πλεγάκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.



κ'. Πάλιν τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΓΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΑΕ ἐστιν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ, καὶ τῆς δυναμένης τὸ πλεγάκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΕ σύγκειται ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΕ, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΔΓ, ἡ ΑΕ ἄρα σύγκειται ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΓ, τουτέστιν ἐκ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ καὶ δύο τῶν ΒΔ. δύο δὲ αἱ ΒΔ δύνανται τὸ πλεγάκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΑΕ ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῶν ΑΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ πλεγάκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.



Ταῦτα λαμβάνεται εἰς τὴν τοῦ λόγου Ἀποτομήν, ταῦτα καὶ εἰς τὴν τοῦ χωρίου Ἀποτομὴν λαμβάνεται, διαφερόντως μόνον.

Πρόβλημα εἰς τὸ δεύτερον λόγου Ἀποτομῆς, χρήσιμον εἰς τὸ τοῦ ιγ'. τόπου ἀνακεφαλαίωσιν.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, λαβεῖν ἐπεκβάλλοντα τὴν ΑΔ δοθὲν τὸ Δ, ποιοῦν τὸν τῆς ΒΔ πρὸς ΔΑ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ πλεγάκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

Ἔστω γεγονός, καὶ ἡ ὑπεροχὴ ἔστω ἡ ΑΕ (ἐν γὰρ τοῖς ἐπάνω εὕρομεν αὐτήν·) ἔστιν οὖν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΕ. καὶ ἐναλλὰξ καὶ διελόντι καὶ χωρίον χωρίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΑ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΑ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ· καὶ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΓΕ παράκειται ὑπερβάλλον τετραγώνῳ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Δ. Συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστω ἡ ὑπεροχὴ ἡ ΕΑ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΑ ἴσον πάλιν τῇ ΓΕ παραβεβλήσθω ὑπερβάλλον τετρα-

τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ ΓΔΕ. λέγω ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖόν ἐστι τὸ Δ. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΑ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ, ἀνάλογον καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΑΕ, ἥτις ἐστὶν ἡ ὑπεροχή. Τὰ δ' αὐτὰ κἂν ζητῶμεν λαβεῖν σημεῖον ποιοῦν ὡς τὴν ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ, καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ. ὅ. ἔ. δ.



Τὸ πρῶτον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ἑπτά, πτώσεις κδ', διορισμοὺς δὲ πέντε· ὧν τρεῖς μὲν μέγιστοι, δύο δ' ἐλάχιστοι. Καὶ ἔστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ ε' τόπου, ἐλάχιστος δὲ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ ς' τόπου, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ ζ'· μέγιστοι δὲ οἱ κατὰ τὰς τετάρτας τοῦ ς' καὶ τοῦ ζ'. Τὸ δεύτερον λόγου ἀποτομῆς [ἔχει τόπους ιδ', πτώσεις δὲ ξγ', διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου, ἀπάγεται γὰρ ὅλον εἰς τὸ πρῶτον. Τὸ πρῶτον χωρίου ἀποτομῆς] ἔχει τόπους ζ', πτώσεις κδ', διορισμοὺς δὲ ἑπτά· ὧν τέσσαρες μέγιστοι, τρεῖς δ' ἐλάχιστοι· καὶ ἔστι μέγιστος μὲν ὁ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ πρώτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην [τοῦ δευτέρου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν δευτέραν] τοῦ τετάρτου τόπου καὶ ὁ [κατὰ τὴν τρίτην τοῦ ἕκτου· ἐλάχιστοι δέ, ὁ] κατὰ τὴν τρίτην τοῦ τρίτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν τετάρτην τοῦ τετάρτου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ ἕκτου. Δεύτερον χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιγ', πτώσεις ξ', διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ εἰς αὐτό.

Ἐπιζητήσειεν ἄν τις διὰ τί ποτε μὲν τὸ λόγου ἀποτομῆς δεύτερον ἔχει τόπους ιδ', τὸ δὲ χωρίου ιγ' ἔχει. Ὁ δὲ διὰ τόδε, ὅτι ὁ ἕβδομος ἐν τῷ τοῦ χωρίου ἀποτομῆς τόπος παραλείπεται ὡς φανερός. ἐὰν γὰρ αἱ παράλληλοι ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ πέρατα πίπτωσιν, οἷα ἐὰν διαχθῇ δοθὲν ἀποτέμνει χωρίον· ἴσον γὰρ γίνεται τῷ ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν περάτων καὶ τοῦ ἀμφοτέρων τῶν ἐξ ἀρχῆς τῇ θέσει δοθεισῶν εὐθειῶν συμβολῆς. ἐν δὲ τῷ λόγου ἀποτομῆς οὐκέτι ὁμοίως· διὰ τοῦτο οὖν προσέχει τόπον ἕνα εἰς τὸ ἕβδομον τοῦ δευτέρου, καὶ τὰ λοιπὰ ὄντα τὰ ὄντα.

Quæ uncis inclusimus desunt & in MSS nostris & quibus usus est Commandinus, *sed ex descriptione præmissâ restituimus.*

 Pappi

Pappi Alexandrini Præfatio ad ſeptimum Collectionis Mathematicæ, quo continentur Lemmata Loci *de Reſolutione.*

LOCUS de Reſolutione inſcriptus, *Hermodore* fili, ut paucis dicam, propria quædam eſt materia, in eorum uſum deſignata, qui, perceptis communibus Elementis, in Geometriâ facultatem ſibi comparare deſiderant inveſtigandi ſolutiones propoſitorum problematum; & in hunc finem ſolummodo utilis. Traditur autem à tribus viris, *Euclide* nempe Elementorum ſcriptore, *Apollonio Pergæo*, & *Ariſtæo* ſeniore. Procedit vero per modum Reſolutionis & Compoſitionis. Reſolutio autem eſt methodus, quâ à quæſito quaſi jam conceſſo, per ea quæ deinde conſequuntur, ad concluſionem aliquam, cujus ope Compoſitio fiat, perducamur. In reſolutione enim, quod quæritur ut jam factum ſupponentes, ex quo antecedente hoc conſequatur expendimus; iterumque quodnam fuerit hujus antecedens; atque ita deinceps, uſque dum in hunc modum regredientes, in aliquid jam cognitum locoque principii habitum incidamus. Atque hic proceſſus Analyſis vocatur, quaſi dicas, inverſa ſolutio. E contrario autem in Compoſitione, cognitum illud, in Reſolutione ultimo loco acquiſitum, ut jam factum præmittentes; & quæ ibi conſequentia erant, hic ut antecedentia naturali ordine diſponentes, atque inter ſe conferentes, tandem ad Conſtructionem quæſiti pervenimus. Hoc autem vocamus Syntheſin. Duplex autem eſt Analyſeos genus, vel enim eſt veri indagatrix, diciturque Theoretica; vel propoſiti inveſtigatrix, ac problematica vocatur. In Theoretico autem genere, quod quæritur, revera ita ſe habere ſupponentes, ac deinde per ea quæ conſequuntur, quaſi vera ſint (ut ſunt ex Hypotheſi) argumentantes; ad evidentem aliquam concluſionem procedimus. Jam ſi concluſio illa vera ſit, vera quoque eſt propoſitio de qua quæritur; ac demonſtratio reciproce reſpondet Analyſi. Si vero in falſam concluſionem incidamus, falſum quoque erit de quo quæritur. In Problematico

matico vero genere, quod proponitur ut jam cognitum ſiſtentes, per ea quæ exinde conſequuntur, tanquam vera, perducimur ad concluſionem aliquam : quod ſi concluſio illa poſſibilis ſit ac ποριστὸν, quod Mathematici *Datum* appellant; poſſibile quoque erit quod proponitur : & hîc quoque demonſtratio reciproce reſpondebit Analyſi. Si vero incidamus in concluſionem impoſſibilem, erit etiam problema impoſſibile. Dioriſmus autem ſive determinatio eſt qua diſcernitur quibus conditionibus quotque modis problema effici poſſit. Atque hæc de Reſolutione & Compoſitione dicta ſunto. Prædictorum autem *de Reſolutione* librorum hic eſt ordo. Datorum *Euclidis* Liber unus. *Apollonii* de Sectione Rationis Libri II. Ejuſdem de Sectione Spatii II. De Sectione determinatâ II. De Tactionibus II. *Euclidis* Poriſmatum III. *Apollonii* de Inclinationibus II. Ejuſdem de Locis planis II. Conicorum VIII. *Ariſtæi* de Locis ſolidis V. *Euclidis* de Locis ad Superficiem II. *Eratoſthenis* de mediis proportionalibus II. Fiunt libri numero XXXIII. quorum contenta, uſque ad *Apollonii Conica*, conſiderationi tuæ ſubjicere volui; una cum numero Locorum & Dioriſmῶn, Caſuumque in unoquoque Libro; ac præterea adjeci *Lemmata* requiſita. Neque credo à me omiſſum eſſe quidquam notatu dignum in deſcriptione horum Librorum.

De Datis Euclidis I.

Primus Liber, nempe *Data Euclidis*, continet omnino Theoremata nonaginta; quorum priora viginti tria ſunt de magnitudinibus in genere, vigeſimus autem quartus, de rectis proportionalibus non datis poſitione. Quæ deinceps quatuordecim, de rectis poſitione datis. Quæ ſequuntur decem, de Triangulis ſpecie ſed non poſitione datis. Proxima ſeptem ſunt de quibuſcunque ſpatiis rectilineis, ſpecie tantum, ſed non poſitione datis. Sex quæ deinceps ſunt, de parallelogrammis & de applicationibus ſpatiorum ſpecie datorum agunt. E quinque autem ſequentibus, primum jam deſcriptum eſt (*nempe Dat.* 49um.) reliqua vero quatuor ſunt de Triangulorum Areis; quòd differentiæ poteſtatum laterum Triangulorum, datam habeant rationem ad eorundem Areas. His ſubjuncta ſeptem uſque ad LXXIII^{um} ſunt

de

de duobus parallelogrammis; quòd juxta angulorum Hypothefes habeant rationem datam inter fe; quædam vero eorum Confectaria habent fimilia in duobus Triangulis. E fex autem fubfequentibus propofitionibus ufque ad 79^{am}, duæ quidem funt de Triangulis, quatuor vero reliquæ funt de pluribus rectis proportionalibus. Tres proximæ funt de duabus rectis datum fpatium comprehendentibus [*quarum fumma vel differentia datur, vel etiam differentia poteftatum.*] Cæteræ vero omnes octo ufque ad nonagefimam, in circulis demonftrantur, vel magnitudine tantum datis, vel etiam pofitione; quòd rectarum per datum punctum ductarum quæ fiunt è fegmentis *rectangula* data fint.

De Sectione Rationis II.

Duo quidem funt Libri de *Sectione Rationis*, fed unam tantum faciunt propofitionem fubdivifam: quare unam illam fic defcribo. "Per datum punctum rectam lineam ducere, "quæ auferat à duabus rectis pofitione datis fegmenta, pun-"ctis in iifdem datis adjacentia, datam rationem inter fe "habentia." Diverfas autem multafque figuras habere contigit, ob fubdivifionem factam; & ob diverfas rectarum datarum inter fe pofitiones, Cafufque puncti dati differentes; propterque Analyfes & Compofitiones horum Cafuum, ut & Diorifmῶn. Habet autem Liber primus de Sectione Rationis Loca feptem, Cafus viginti quatuor, Diorifmos vero quinque: quorum tres funt maximi, & duo minimi. Maximus quidem eft ad Cafum tertium Loci V. Minimi vero funt ad Cafus fecundos Locorum VI & VII^{mi}. Reliqui autem maximi funt ad Cafus quartos eorundem Locorum VI & VII^{mi}. Liber pofterior de Sectione Rationis Loca habet quatuordecim. Cafus vero LXIII; Determinationes autem ex primo, ad quem quafi totus refertur. Lemmata habent hi duo libri viginti. Itidemque figuras (five fchemata) habent CLXXXI. vel etiam plures juxta *Periclem*.

De Sectione Spatii II.

Duo funt libri de *Sectione Spatii*, fed in his non continetur nifi unum problema fubdivifum. Propofitio autem hæc

una

una quoad cætera priori ſimilis eſt, ac ſolo hoc differt; quod in illâ oporteat ſegmenta duo abſciſſâ rationem habere datam, in hâc vero datum continere rectangulum. Exprimetur vero ad hunc modum: "Per datum punctum rectam lineam "ducere, quæ auferat à rectis duabus poſitione datis ſeg- "menta, datis in ipſis punctis adjacentia, quæ rectangulum "æquale dato comprehendant." Hæc etiam propoſitio ob eaſdem cauſas plurimas quoque habet figuras. Liber autem prior de Sectione Spatii ſeptem habet Loca, Caſus viginti quatuor, ac Dioriſmos ſeptem; quorum quatuor maximi ſunt, tres vero minimi. Maximus autem eſt ad Caſum ſecundum Loci primi; ut & ad primum ſecundi. Similiter ad ſecundum Caſum quarti & tertium ſexti. Minimi vero ſunt ad Caſum tertium Loci tertii, ad quartum quarti, ut & ad primum ſexti Loci. Secundus liber de Sectione Spatii Loca habet XIII, & Caſus LX; Determinationes vero ex primo, ad quem totus refertur. Conſtat autem liber primus Theorematis quadraginta octo; ſecundus vero LXXVI.

De Sectione Determinatâ II.

His ſubjiciuntur libri duo de *Sectione Determinatâ*, quas etiam ad modum præcedentium unam propoſitionem dicere liceat, ſed disjunctam: quæ hujuſmodi eſt. "Datam rectam "infinitam in uno puncto ſecare, ita, ut è rectis interceptis "inter illud & puncta in illâ data, vel quadratum ex unâ, "vel rectangulum ſub duabus interceptis, datam habeat ra- "tionem, vel ad contentum ſub *aliâ* unâ interceptâ & datâ "quâdam; vel etiam ad contentum ſub duabus *aliis* inter- "ceptis: idque ad quam partem velis punctorum datorum." Hujus autem, quaſi bis disjunctæ, & intricatos Dioriſmos habentis, per plura neceſſario facta eſt demonſtratio. Hanc autem dedit *Apollonius* communi methodo tentamen faciens, ac ſolis rectis lineis uſus, ad exemplum ſecundi libri Elementorum primorum *Euclidis*: ac rurſus idem demonſtravit ingenioſe quidem, & magis ad inſtitutionem accommodate, per ſemicirculos. Habet autem primus liber Problemata ſex, Epitagmata, *ſive Diſpoſitiones punctorum*, ſedecim; Dioriſmos quinque: quorum quatuor quidem Maximi ſunt, Minimus vero unus. Sunt autem maximi, ad ſecundum Epitagma ſecundi

cundi problematis; item ad tertium quarti problematis; ad tertium quinti & ad tertium sexti. Minimus vero est ad tertium Epitagma tertii problematis. Secundus liber de Sectione determinata tria habet Problemata, Dispositiones novem, Determinationes tres; è quibus Minima sunt ad tertium primi, ut & ad tertium secundi; Maximum autem est ad tertium tertii problematis. Lemmata habet liber primus XXVII, secundus vero XXIV. Insunt autem in utroque libro de Sectione determinatâ Theoremata octoginta tria.

De Tactionibus II.

His ordine subnexi sunt libri duo *de Tactionibus*, in quibus plures inesse propositiones videntur; sed & ex his unam etiam faciemus, ad hunc modum se habentem. "E punctis "rectis & circulis, quibuscunque tribus positione datis, circu-"lum ducere per singula data puncta, qui, si fieri possit, "contingat etiam datas lineas." Ex hac autem ob multitudinem in Hypothesibus datorum, tam similium quam dissimilium *generum*, fiunt necessario decem propositiones diversæ; quia ex tribus dissimilibus generibus fiunt diversæ triades inordinatæ numero decem. Data etenim esse possunt vel tria puncta; vel tres rectæ; vel duo puncta & recta; vel duæ rectæ & punctum; vel duo puncta & circulus; vel duo circuli & punctum; vel duo circuli & recta; vel punctum, recta & circulus; vel duæ rectæ & circulus; vel tres circuli. Horum duo quidem prima problemata ostenduntur in libro quarto primorum Elementorum. Nam per tria data puncta, quæ non sint in linea recta, circulum ducere, idem est ac circa datum triangulum circumscribere. Problema autem in tribus datis rectis non parallelis, sed inter se occurrentibus, idem est ac dato triangulo circulum inscribere. Casus vero duarum rectarum parallelarum cum tertiâ occurrente, quasi pars esset secundæ subdivisionis, cæteris permittitur. Deinde proxima sex problemata continentur in primo libro. Reliqua duo, nempe de duabus rectis datis & circulo, & de tribus datis circulis, sola habentur in secundo libro; ob multas diversasque positiones circulorum & rectarum inter se, quibus fit ut etiam plurium determinationum opus sit. Prædictis his Tactionibus congener est ordo problematum,

quæ ab editoribus omissa fuerant. Nonnulli autem priori horum librorum illa præfixerunt: Compendiosus enim & introductorius erat tractatus ille, & ad plenam de Tactionibus doctrinam absolvendam maxime idoneus. Hæc omnia rursus una propositio complectitur, quæ quidem quoad Hypothesim magis quam præcedentia contracta est, superaddita autem est conditio ad constructionem: estque hujusmodi. "E punctis, rectis, vel circulis, datis duobus quibuscunque, "describere circulum magnitudine datum, qui transeat per "punctum vel puncta data, ac, si fieri possit, contingat etiam "lineas datas." Continet autem hæc propositio sex problemata: ex tribus enim quibuscunque diversis generibus fiunt Duades inordinatæ diversæ numero sex. Vel enim datis duobus punctis, vel duabus rectis, vel duobus circulis, vel puncto & rectâ, vel puncto & circulo, vel rectâ & circulo, oportet circulum magnitudine datum describere, *qui data contingat*; hæc autem resolvenda sunt & componenda ut & determinanda juxta Casus. Liber primus *Tactionum* problemata habet septem; secundus vero quatuor. Lemmata autem ad utrumque librum sunt XXI; Theoremata LX.

De Porismatis Euclidis III.

Post *Tactiones* in tribus libris habentur *Porismata Euclidis*: collectio artificiosissima multarum rerum, quæ spectant ad Analysin difficiliorum & generalium problematum, quorum quidem ingentem copiam præbet Natura. Nihil vero additum est iis quæ *Euclides* primum scripserat, præterquam quod Scioli nonnulli, qui nos præcesserunt, sequentibus editionibus pauca de suis immiscuerint. Apud hos enim unumquodque Porisma definitum habet demonstrationum numerum: cum *Euclides* ipse non nisi unam, eamque maxime evidentem, in singulis posuerit. Habent autem subtilem & naturalem contemplationem, necessariamque & maxime universalem, atque iis qui singula perspicere atque investigare valent admodum jucundam. Specie autem hæc omnia neque Theoremata sunt, neque Problemata; sed mediæ quodammodo inter hæc naturæ, ita ut eorum propositiones censeri possint, vel inter Theoremata, vel Problemata: unde factum est ut nonnulli è Geometris hæc genere Theore-

mata esse contendant, alii vero Problemata esse; respicientes ad formam tantum propositionis. Differentias autem horum trium melius intellexisse Veteres manifestum est ex definitionibus. Dixerunt enim Theorema esse quo aliquid proponitur demonstrandum: Problema quo proponitur aliquid construendum: Porisma vero esse quo aliquid proponitur investigandum. A Neotericis autem immutata est hæc Porismatis definitio, qui, quum hæc omnia proprio Marte investigare haud potuerint, Elementa hæc adhibuerunt, contenti demonstrare tantum quid sit quod quæritur, absque illius investigatione: & quamvis à definitione & ab ipsâ doctrinâ redarguerentur, hoc tamen modo definierunt. Porisma est quod deest in Hypothesi Theorematis Localis. Hujus autem generis Porismatum Loca Geometrica sunt species; quæ quidem redundare videntur in libris de Resolutione: ac seorsim à Porismatis collecta sub propriis titulis traduntur, eo quod magis diffusa & copiosa sit hæc præ cæteris speciebus. E Locis enim quædam Plana sunt, quædam Solida, quædam Linearia, & præter hæc sunt Loca ad medietates, sive à mediis proportionalibus orta. Accidit hoc etiam Porismatis, propositiones habere contractas & in compendium redactas, omissis pluribus quæ pro more subintelligi solent: unde evenit Geometras non paucos ex parte tantum rem percipere, dum ea quæ inter ostensa magis necessaria sunt haud capiunt. Multa vero ex istis in unâ propositione comprehendere vix possibile est, quia ipse *Euclides* non multa in unaquaque specie posuerit: sed, ut ostenderet copiosiorem scientiam, pauca tantum, quasi ad jacienda in singulis principia, scripta reliquerit. Datum *** primi libri omnino ejusdem speciei est cum uberrima illa Locorum specie, ut decem ** sint numero. Quare hujus propositiones unâ solâ comprehendi posse animadvertentes, rem ad hunc modum describimus. "Duabus rectis " in eodem plano positione datis, * vel occurrentibus inter se " vel * parallelis, si dentur in unâ earum tria puncta: cæ- " tera vero puncta præter unum tangant rectam positione " datam, etiam hoc quoque tanget rectam positione datam." Hoc autem de quatuor tantum rectis dicitur, quarum non plures quam duæ per idem punctum transeunt. In quolibet autem rectarum numero quomodo se res habeat vulgo ignoratur. " Si quotcunque rectæ occurrant inter se,

" nec

" nec plures quam duæ per idem punctum; data vero sint " puncta omnia in earum unâ, unumquodque autem pun- " ctum in altera tangat rectam positione datam." Vel generalius sic. " Si quotcunque rectæ occurrant inter se, neque " sint plures quam duæ per idem punctum; omnia vero " puncta in unâ earum data sint; reliquorum numerus erit " Numerus Triangularis, cujus latus exhibet numerum pun- " ctorum rectam positione datam tangentium. Quod si tres " fuerint hujusmodi intersectiones, quæ non reperiantur ad " angulos trianguli, (*hoc est, si fuerint in rectâ lineâ*:) una- " quæque intersectio reliqua tanget positione datam." *Euclidem* autem hoc nescivisse haud verisimile est, sed principia sola respexisse: nam per omnia Porismata non nisi prima principia, & semina tantum multarum & magnarum rerum sparsisse videtur. Hæc autem juxta Hypothesium differentias minime distinguenda sunt; sed secundum differentias accidentium & quæsitorum. Hypotheses quidem omnes inter se differunt, cum specialissimæ sint: accidentium vero & quæsitorum unumquodque, cum sit unum idemque, multis diversisque Hypothesibus contingit.

Talia itaque inquirenda offeruntur in primi libri propositionibus: (in principio septimi habetur Diagramma huc spectans) " Si à duobus punctis datis inflectantur duæ rectæ " ad rectam positione datam, abscindat autem earum una à " rectâ positione datâ segmentum dato in eâ puncto adja- " cens, auferet etiam altera ab aliâ rectâ segmentum datam " habens rationem." Deinde in subsequentibus: " Quod pun- " ctum illud tangit rectam positione datam. Quod ratio ipsius " . . . . ad rectam . . . . data est. Quod ratio ipsius . . . . ad " partem abscissam . . . . datur. Quod hæc recta . . . . posi- " tione datur. Quod hæc ad datum punctum vergit. Quod " data est ratio ipsius . . . . ad interceptam inter punctum . . " & datum punctum . . Quod data est ratio rectæ . . . . ad " aliquam à puncto . . ductam. Quod datur ratio rectan- " guli * * ad rectangulum sub datâ & ipsâ . . . . Quod hujus " rectanguli unum latus datum est, alterum vero rationem " habet ad rectam abscissam. Quod rectangulum hoc vel so- " lum, vel una cum quodam dato spatio est * * illud vero " rationem datam habet ad partem abscissam. Quod recta " . . . . una cum aliâ ad quam . . . . est in ratione datâ, rati-

 " onem

"onem habet datam ad interceptam inter punctum .. & "datum punctum .. Quod contentum sub quâdam datâ & "rectâ .... æquale est contento sub aliâ datâ & interceptâ "inter punctum .. & datum .. Quod datur ratio rectæ ".... , atque etiam ipsius .... , ad interceptam inter pun- "ctum .. & datum. Quod recta .... aufert à positione "datis segmenta rectangulum datum comprehendentia."

In secundo libro Hypotheses quidem diversæ sunt. Inquirenda vero ut plurimum eadem ac in primo: prætereaque hæc. "Quod rectangulum illud .... in .... rationem ha- "bet ad partem abscissam, vel per se, vel adjuncto quodam "dato rectangulo. Quod datur ratio rectanguli sub .... "& .... ad partem abscissam. Quod data est ratio rectanguli "sub utrâque .... & .... simul sumptâ, & utrâque ipsa- "rum .. .. & .... etiam simul sumptârum, ad partem ab- "scissam. Quod contentum sub ipsâ .... & utrâque ipsa- "rum .... & .... quæ ad rectam .... rationem datam ha- "bet; atque etiam contentum sub .... & illâ quæ ad ipsam ".... datam habet rationem, sunt in data ratione ad ἀποτο- "μῇ. Quod datur ratio utriusque .... , ... simul sumptæ "ad interceptam inter punctum .. & datum punctum .. "Quod datum est rectangulum sub ipsis .... & ...."

In tertio libro plures sunt Hypotheses de semicirculis; paucæ autem de Circulo & segmentis. Inquirendorum vero maxima pars affinis est præcedentibus. Insuper vero hæc sese offerunt. "Quod datur ratio rectanguli .... in .... ad "rectangulum .... in .... Quod datur ratio quadrati ipsius ".... ad partem abscissam. Quod rectangulum sub ipsis ".... & .... *æquale est* rectangulo sub datâ .... & interceptâ "inter punctum .. & datum punctum .. Quod quadra- "tum ipsius .... *æquale est* contento sub datâ .... & in- "terceptâ inter Cathetum & punctum datum .... Quod "rectæ .... , ... una cum illâ ad quam .... datam habet "rationem, simul sumptæ, datam habent rationem ad par- "tem abscissam. Quod datur punctum aliquod, à quo si du- "cantur rectæ ad puncta quævis .. continebunt illæ tri- "angulum specie datum. Quod datur aliquod punctum à "quo si ducantur rectæ ad puncta quævis .. , abscindent "illæ *è circulo* æquales circumferentias. Quod recta .... "vel erit in Parathesi, vel cum quâdam aliâ rectâ versus

"pun-

"punctum datum vergente datum continebit angulum." Habent autem tres Poriſmatum libri Lemmata XXXVIII, Theoremata vero CLXXI.

Hactenus Poriſmatum *deſcriptio, nec mihi intellecta nec lectori profutura. Neque aliter fieri potuit: tam ob defectum Schematis cujus ſit mentio; unde rectæ ſatis multæ, de quibus hic agitur, abſque notis Alphabeticis, ullove alio diſtinctionis charactere, inter ſe confunduntur: quàm ob omiſſa quædam ac tranſpoſita vel aliter vitiata in propoſitionis generalis expoſitione; unde quid ſibi velit* Pappus *haud mihi datum eſt conjicere. His adde dictionis modum nimis contractum, ac in re difficili, qualis hæc eſt, minime uſurpandum.*

De Locis Planis II.

Loca in genere hoc modo diſtribuuntur. Alia ſunt ἐφεκτικὰ, ſive adæquata; de quibus *Apollonius* ante propria Elementa hæc habet: "Puncti locus eſt punctum, Lineæ linea, Super- "ficiei ſuperficies, Solidique ſolidum." Alia vero διεξοδικὰ, quaſi dicas progreſſiva; quo ſenſu Puncti locus eſt linea, Lineæ ſuperficies, ac Superficiei ſolidum. Alia demum ἀναστροφικὰ ſive circumgreſſiva, ſi ita loqui liceat, quo modo puncti locus eſt Superficies, ac lineæ Solidum. Ex his quæ Analyſim Geometricam ſpectant, Loca datorum poſitione ἐφεκτικὰ ſunt. Quæ vero plana, ſolida & linearia dicuntur, ſunt loca διεξοδικὰ punctorum: Loca vero ad ſuperficies ſunt ἀναστροφικὰ punctorum & διεξοδικὰ linearum. Linearia vero poſt loca ad Superficiem demonſtrationes ſuas habent. Jam loca plana, de quibus hîc agitur, in genere ſunt lineæ quæcunque vel rectæ vel circulares: ſolida vero ſunt Coni ſectiones omnes, nempe Parabolæ, Ellipſes, vel Hyperbolæ quævis. Linearia vero dicuntur lineæ omnes quæ nec rectæ nec circuli ſunt, neque aliquæ è dictis Coni ſectionibus. Quæ vero ab *Eratoſthene* Loca ad Medietates dicuntur, ejuſdem quidem generis ſunt, ſed ob proprietates Hypotheſium *diverſa ſunt* ab illis * * * * * *. Veteres igitur, hunc Locorum planorum ordinem reſpicientes, Elementa tradiderunt; quem cum negligerent poſteriores, alia *improprie* appoſuerunt; quaſi loca illa multitudine infinita non fuerint, ſi quis ſingula recenſere velit, nullâ hujus ordinis habitâ ratione. Poſtpoſitis igitur jam deſcriptis, quæque ordine priora ſunt

præ-

Præmittens, hac unâ Propositione rem complectar. "Si du-
"cantur rectæ duæ, vel ab eodem dato puncto, vel à duobus,
"quæ vel sint in lineâ rectâ, vel parallelæ, vel datum contineant
"angulum, vel datam habeant inter se rationem, vel datum
"comprehendant spatium; contingat autem terminus unius
"Locum planum positione datum: continget etiam alterius
"terminus Locum planum positione datum, interdùm quidem
"ejusdem generis, interdum vero diversi; interdum similiter
"positum respectu rectæ lineæ, interdum contrario modo si-
"tum." Atque hæc quidem fiunt propter differentias sub-
jectorum. Consentanea vero his sunt tria illa quæ in princi-
pio *Charmandri* reperiuntur; nempe, "Si rectæ cujusvis
"magnitudine datæ terminus unus datus sit, alter terminus
"continget concavam circuli circumferentiam positione da-
"tam. Si à duobus datis punctis inflectantur rectæ datum
"angulum continentes, commune earum punctum tanget
"circumferentiam concavam positione datam. Si sit area
"Trianguli magnitudine data, ac basis quoque magnitudine
"ac positione detur; vertex ejus continget rectam positione
"datam." Alia vero sunt hujusmodi. "Si rectæ magnitu-
"dine datæ, & à quapiam positione datâ æquidistantis, unus
"terminus contingat Locum planum positione datum; alter
"quoque terminus Locum planum positione datum continget.
"Si à quodam puncto ad duas rectas positione datas, vel
"parallelas vel occurrentes inter se, ducantur in datis angu-
"lis rectæ, quæ datam habeant rationem inter se; vel qua-
"rum una, simul cum eâ ad quam altera datam habet ratio-
"nem, data fuerit; continget punctum rectam positione da-
"tam. Si fuerint quotcunque rectæ positione datæ, & ad
"ipsas à quodam puncto ducantur rectæ in datis angulis;
"sitque rectangulum sub datâ quâdam & unâ è ductis rectis,
"simul cum rectangulo sub datâ & aliâ ductâ, æquale rect-
"angulo sub datâ & tertiâ ductâ; & sic de cæteris: contin-
"get punctum rectam positione datam. Si à quodam puncto
"ad positione datas duas parallelas ducantur rectæ in datis
"angulis, abscindentes rectas, ad puncta in ipsis data adja-
"centes, quæ vel fuerint in datâ ratione [vel datum spatium
"comprehendant, vel ita ut summa vel differentia data-
"rum specierum ex ipsis ductis, æqualis fuerit dato spatio]
"punctum illud continget rectam positione datam."

Hæc

Hæc autem continentur in ſecundo libro. "Si à duobus "datis punctis inflectantur rectæ, quarum quadrata dato ſpa-"tio inter ſe differunt, punctum concurſûs tanget rectam po-"ſitione datam. Si vero fuerint in datâ ratione, tanget "idem vel lineam rectam vel circumferentiam circuli. Si "ſit recta poſitione data, & in ipſâ datum ſit punctum, unde "ducatur quædam recta terminata; ab hujus autem termino "demittatur normalis ad rectam poſitione datam: ſit vero "quadratum ductæ æquale rectangulo ſub datâ quâdam & "interceptâ, vel inter punctum datum, vel etiam inter aliud "quodvis punctum datum in poſitione datâ ſumptum, & "normalem: terminus hujus ductæ continget circuli circum-"ferentiam poſitione datam. Si à duobus datis punctis infle-"ctantur rectæ, & ſit quadratum unius quadrato alterius dato "majus quam in ratione; continget punctum circumferen-"tiam poſitione datam. Si à quotcunque datis punctis in-"flectantur rectæ ad unum punctum, ſitque ſumma ſpecie-"rum ab omnibus factarum æqualis dato ſpatio, punctum il-"lud continget circumferentiam poſitione datam. Si à duo-"bus datis punctis inflectantur rectæ; à puncto autem con-"curſûs ducatur recta poſitione datæ normalis, quæ auferat "à rectâ poſitione datâ ſegmentum puncto dato adjacens, ac "ſit ſumma quadratorum è rectis inflexis æqualis rectan-"gulo ſub datâ & ſegmento intercepto: punctum illud con-"curſus tanget circumferentiam poſitione datam. Si intra cir-"culum poſitione datum detur punctum quodlibet, ac per idem "ducatur recta quævis, in quâ ſumatur punctum aliquod "extra circulum: ſit autem quadratum interceptæ inter pun-"cta illa æquale rectangulo ſub totâ & parte exteriore ad "circulum terminatâ, vel ſoli, vel etiam adjuncto rectan-"gulo ſub ſegmentis duobus interioribus: punctum extra "ſumptum datam poſitione rectam continget. Quod ſi pun-"ctum illud tangat rectam poſitione datam, circulus vero non "deſcriptus ſit; puncta illa duo, ad utramque partem puncti "dati, contingent ejuſdem circuli poſitione dati circumferen-"tiam." Habent autem duo libri de Locis planis Theoremata ſive diagrammata CXLVII. Lemmata vero VIII.

De

De Inclinationibus II.

Inclinare dicitur linea ad punctum, si producta ad ipsum pervenit: universim autem idem est, sive dicatur linea inclinare ad datum punctum, sive in eâ partem aliquam datam esse: sive per datum punctum transire. Inscripti autem sunt hi libri *Inclinationes* ab horum uno. Problema vero generale hoc est: "Duabus lineis positione datis, inter eas "inserere rectam magnitudine datam, quæ ad datum pun-"ctum pertingat." E particularibus autem Problematis, diversa subjecta habentibus, quædam plana sunt, quædam solida, quædam etiam linearia. Selecta vero è planis, quæ ad plura magis utilia visa sunt, hæc demonstrantur. "Datis "positione semicirculo & rectâ quæ basi normalis sit; vel "duobus semicirculis in eâdem rectâ bases habentibus; inserere "rectam magnitudine datam inter duas illas lineas, quæ ad "angulum semicirculi pertingat." Et "Rhombo dato & "producto uno ejus latere, adaptare, sub angulo ejus exte-"riore, rectam magnitudine datam ad angulum oppositum "vergentem." Et "In circulo positione dato inserere re-"ctam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertin-"gat." In primo autem libro demonstratur Problema de uno semicirculo & recta; quod quidem quatuor Casus habet: ut & illud de circulo in duos Casus divisum: atque etiam illud de rhombo, duos quoque Casus habens. In secundo vero habetur unicum Problema de duobus semicirculis, cujus ex Hypothesi decem sunt Casus; atque horum etiam plures sunt subdivisiones dioristicæ, propter datam magnitudinem rectæ inserendæ.

Hæc igitur in Loco *de Resolutione* plana reperiuntur, quæ scilicet prius ordine demonstrantur, absque Medietatibus *Eratosthenis*, nonnisi ultimo loco adhibendis. Exactis autem planis, solidorum contemplationem ordo postulare videtur. Solida vero vocant Problemata, non quæ de figuris solidis proponuntur, sed quæ, cum non possint per plana demonstrari, trium linearum Conicarum opem requirunt: ita ut prius de illis necesse sit scribere. Primus itaque Elementa Conica protulit *Aristæus* senior, in quinque libris; quasi in eorum usum qui jam hæc satis percipere valent,

compendiosius conscriptis. Habent autem Inclinationum Libri duo Theoremata sive diagrammata CXXV, Lemmata vero XXXVIII.

De Conicis VIII.

Quatuor *Conicorum* libros ab *Euclide* receptos fusius explicavit *Apollonius*; adjectisque quatuor aliis, edidit octo Conicorum volumina. *Aristæus* autem (qui hactenus solus est autor de Locis Solidis, conscriptis quinque libris argumento Conicis conjuncto) & quotquot *Apollonio* priores fuerunt, tres Conicas lineas, Acutanguli, Rectanguli & Obtusanguli Coni Sectiones nominârunt. Quoniam vero in quolibet horum trium Conorum, diverso modo sectorum, omnes hæ tres producantur lineæ; *Apollonius*, ut videtur, non contentus Antecessorum placitis (cum sectio illa, quam dixerunt Coni acutanguli sectionem, etiam in Cono rectangulo vel obtusangulo secari possit; uti & sectio Coni rectanguli dicta, in acutangulo vel obtusangulo; cumque etiam obtusanguli Coni sectio possit tum acutanguli tum rectanguli sectio esse) mutatis nominibus sectionem Coni, acutanguli dictam, Ellipsin vocavit; rectanguli Parabolam; Obtusanguli vero Hyperbolam: singulas à proprio quodam accidente. Rectangulum enim quoddam ad rectam quandam applicatum, in Acutanguli Coni sectione deficiens fit quadrato; *in Obtusanguli excedens quadrato*; in rectanguli vero sectione neque deficiens neque excedens. Hoc autem admisit, non percepto, quod, juxta certum quendam casum in situ plani Conum secantis, alia atque alia ex his lineis generetur. Nam si planum secans parallelum fuerit uni Coni lateri, una sola ex tribus lineis producitur, semper eadem; quam tamen *Aristæus* ille secti Coni nomine appellavit.

Apollonius autem ipse, de iis quæ continentur in octo libris Conicorum à se conscriptis, hæc habet; summariam hanc descriptionem in præfatione primi tradens. "Continet liber "primus origines trium sectionum, ut & oppositarum secti-"onum; earundemque præcipua symptomata, plenius & uni-"versalius, quam in aliorum scriptis reperiuntur, elaborata. "Secundus habet quæ ad Diametros & Axes sectionum & op-"positarum pertinent, ut & ad Asymptotos; aliaque quæ ge-

f "neralem

" neralem ac necessarium præbent usum ad Diorismos. Quas " vero diametros, qualesque axes nomino ex hoc libro disces. " Tertius habet multa & omnigena Theoremata utilia ad " compositiones Locorum solidorum, & ad Determinationes : " quorum plurima perpulchra & nova sunt. Hisce autem " perpensis animadverti, non compositum fuisse ab *Euclide* " locum ad tres vel quatuor lineas, sed particulam tantum " ejus, atque hanc non satis feliciter: impossibile enim erat " absque prædictis propositionibus perfectam ejus composi- " tionem exhibere. Quartus docet quotupliciter Coni secti- " ones vel inter se, vel cum circuli circumferentiâ occurrere " possint ; atque insuper alia, de quibus nihil ab iis qui " ante nos fuerunt memoriæ proditum est: nimirum quot " punctis Coni sectio vel circuli circumferentia vel etiam " sectiones oppositæ oppositis sectionibus occurrant. Reli- " qui quatuor libri penitiorem magis spectant scientiam ; " Primus enim ex iis magnâ ex parte agit de Maximis & Mi- " nimis: Secundus de æqualibus & similibus sectionibus : " Tertius tradit Theoremata dioristica , sive determinandi " vim habentia: Quartus vero habet Problemata Conica de- " terminata." Hactenus *Apollonius*. Quem vero in tertio ait Locum ad tres vel quatuor lineas ab *Euclide* non perfectum fuisse, neque ipse poterat, neque aliquis alius explere ; vel tantillum adjicere iis quæ scripserat *Euclides*, solâ ope Conicorum illorum, quæ ad ea usque tempora demonstrata ferebantur. Id quod & ipse *Apollonius* testatur, dum dicit, " Im- " possibile fuisse compositionem perfici, absque iis quæ ipse " invenire necesse habuit." *Euclides* autem excipiens *Aristæum* nuper editis Conicis de Mathesi præclare meritum, nolensque alios prævenire, vel sese alterius negotio immiscere (erat enim ingenio mitissimus, & erga omnes (ut par erat) benignus, qui vel tantillum Mathematicas disciplinas promovere poterant, aliisque nullo modo infensus; sed summe accuratus, minimeque (uti hic) gloriosus) quantum de Loco possibile erat ostendi per illius Conica, scriptis mandavit ; non affirmans perfecta esse quæ demonstraverat: nam sic jure meritoque reprehendi potuisset. Nequaquam vero hoc modo: siquidem & ipse *Apollonius*, plurima in Conicis imperfecta relinquens, minime ab aliis redarguitur. Poterat quidem ea adjecisse, quæ ad Locum absolvendum deerant, ani-

mo complexus ea quæ *Euclides* de Loco scripserat, & operam dans *Euclidis* discipulis *Alexandriæ* longo tempore (unde exquisitam adeo in Mathematicis peritiam est assequutus) haud tamen illud sustinuit efficere. Locus autem ad tres vel quatuor lineas (de quo ob nonnulla adjecta tantopere se jactat, cum potius primo scriptori gratias referre debuisset) hujusmodi est: "Tribus rectis positione datis, si à quodam puncto "ducantur rectæ ad tres illas in datis angulis; detur autem ratio rectanguli sub duabus ductis contenti ad quadratum reliquæ: punctum continget locum solidum positione datum, "hoc est, aliquam è tribus lineis Conicis. Si vero ad quatuor "rectas positione datas ducantur rectæ in datis angulis; ac "data fuerit ratio rectanguli sub duabus ductis ad rectangulum sub duabus reliquis ductis: punctum similiter tanget Coni sectionem positione datam." Demonstratur autem Locum esse planum, si ad duas tantum positione datas ducantur rectæ. Si vero ducantur ad plures quam quatuor; continget punctum Loca nondum cognita, sed Lineas tantum dictas. Quales vero sint, quasve proprietates habeant, nondum compertum est. Harum unam, eamque neque primam, neque maxime conspicuam, utilem fore existimantes, composuerunt. Hisce autem propositionibus constant: "Si "ab aliquo puncto ad quinque rectas positione datas ducantur rectæ in datis angulis; ac detur ratio solidi parallelepipedi rectanguli sub tribus ductis contenti ad parallelepipedum solidum rectangulum sub duabus reliquis & datâ "quâdam contentum: punctum illud continget locum linearem positione datum. Si autem ducantur ad sex, ac ratio "data sit dicti solidi sub tribus contenti, ad illud quod sub "tribus reliquis continetur: rursus punctum continget lineam positione datam." Quod si plures fuerint quam sex, non amplius habent dicere, quod ratio data sit contenti sub quatuor ductis ad contentum sub reliquis; quoniam non datur aliquod contentum sub pluribus quam tribus dimensionibus. Sibimet autem in his plus justo concesserunt, qui paulo ante nos hæc interpretati sunt; nihil quidem quod ullo modo complecti possumus in medium proferentes: cum scilicet quod quatuor dimensionibus constet, vel Biquadrati vel Supersolidi sub quatuor rectis nomine comprehenderint. Licebit autem per compositas rationes hæc & dicere & demonstrare

monstrare universim; tam in prædictis propositionibus quam in superioribus: ad hunc modum. "Si à quodam puncto ad "rectas positione datas ducantur rectæ in datis angulis; & "data sit ratio composita ex rationibus quas habet una è du- "ctis ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & re- "liqua ad datam, si fuerint septem; vel si fuerint octo, & "reliqua ad reliquam: continget punctum illud lineam po- "sitione datam. Ac pari modo fiet, quotcunque fuerint du- "ctæ pares vel impares numero." Hæc vero consequuntur Locum ad quatuor rectas. Nihil igitur protulerunt unde cognosci poterit quænam sit illa linea. Qui vero difficultatem perspexere, rem minime aggressi sunt; ad exemplum Veterum & Scriptorum omnium melioris notæ. Ego autem, quum plurimos viderim circa principia in disciplinis Mathematicis occupatos, disquisitionibusque Physicis operam navantes, erubui sane, eo quod facile esset multo præstantiora ac utiliora proferre. Ne vero, quasi hoc gratis dixissem, alienus à ratione jam videar, hæc parum quidem cognita propalabo.

Figuræ perfecto gyro genitæ rationem habent compositam ex ratione gyrantium, & ex illâ rectarum similiter ad axes ductarum ab ipsarum gyrantium Gravitatis centris. Ratio vero incompleto gyro genitarum fit ex ratione gyrantium & arcuum quos descripsêre earundem centra Gravitatis. Manifestum autem est horum arcuum rationem componi ex ratione ductarum ad axes, & ex illâ angulorum quos continent ductarum extremitates, si ad axes genitarum æstimantur.

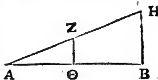
Hæ vero propositiones, quæ fere una sunt, plurima & varia complectuntur Theoremata de lineis, superficiebus & solidis, unâ eademque demonstratione; quorum nonnulla quidem nondum demonstrata sunt; alia vero jam olim, uti ea quæ occurrunt in duodecimo Elementorum. Habent autem libri octo Conicorum *Apollonii* Theoremata sive Diagrammata CCCCLXXXVII, Lemmata vero LXX.

Lemmata

Lemmata Pappi *ad Libros de Sectione Rationis & Spatii.*

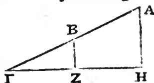
I. DATAM rectam lineam in data ratione secare.

Sit recta data AB, ratio autem data ut Γ ad Δ: oportet rectam AB dividere in ratione ipsius Γ ad Δ. Inclinetur sub quovis angulo ad rectam AB recta AH; & termino rationis Γ æqualem aufer AZ, ipsi vero Δ rectam ZH: dein junctâ BH, ipsi parallela ducatur ZΘ. Quoniam enim AΘ est ad ΘB ut AZ ad ZH; AZ vero æqualis est ipsi Γ, ZH autem ipsi Δ: erit igitur AΘ ad ΘB ut Γ ad Δ. Dividitur itaque *in ea ratione* AB in puncto Θ.



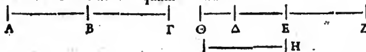
II. Datis tribus rectis AB, BΓ, Δ, invenire aliam quandam quæ sit ad Δ sicut AB ad BΓ.

Rursus inclinetur recta quædam ΓH sub quovis angulo; & fiat ΓZ ipsi Δ æqualis. Junge BZ, ipsique parallela ducatur AH. Est igitur AB ad BΓ sicut HZ ad ZΓ, hoc est, ad Δ. Quare HZ est recta quæsita. Similiter si daretur tertia quartam inveniremus.



III. Habeat AB ad BΓ majorem rationem quam ΔE ad EZ: componendo erit ratio AΓ ad ΓB major ratione ΔZ ad ZE.

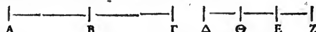
Fiat enim ut AB ad BΓ ita alia quædam ut H ad EZ; habebit igitur H ad EZ majorem rationem quam ΔE ad EZ, unde major erit H quam ΔE. Eidem ponatur ΘE æqualis. Quoniam autem AB est ad BΓ ut ΘE ad EZ, *erit componendo ut* AΓ *ad* ΓB *ita* ΘZ *ad* EZ. Sed ΘZ majorem habet rationem ad EZ quam ΔZ ad EZ; quare etiam AΓ majorem habet rationem ad ΓB quam ΔZ ad ZE.



IV. Rur-

IV. Rursus habeat ΑΒ minorem rationem ad ΒΓ quam habet ΔΕ ad ΕΖ; erit etiam ratio ΑΓ ad ΓΒ minor ratione ΔΖ ad ΖΕ.

Quoniam ΑΒ minorem habet rationem ad ΒΓ quam ΔΕ ad ΕΖ; si fiat ut ΑΒ ad ΒΓ ita quædam alia ad ΕΖ, erit illa minor quam ΔΕ, nempe ΕΘ. Quapropter *componendo* ΑΓ erit ad ΓΒ sicut ΘΖ ad ΖΕ. Sed ΘΖ minorem habet rationem ad ΖΕ quam ΔΖ ad ΖΕ, adeoque ΑΓ ad ΓΒ minorem quoque habet rationem quam ΔΖ ad ΖΕ.



V. Habeat autem ΑΒ ad ΒΓ majorem rationem quam ΔΕ ad ΕΖ: permutando erit ratio ΑΒ ad ΔΕ major ratione ΒΓ ad ΕΖ.

Fiat enim ut ΑΒ ad ΒΓ, ita alia quædam ad ΕΖ. Patet eam majorem esse quam ΔΕ: sit autem illa ΗΕ. Permutando igitur erit ut ΑΒ ad ΗΕ ita ΒΓ ad ΕΖ. Sed ΑΒ majorem habet rationem ad ΔΕ quam ΑΒ ad ΗΕ, hoc est, quam ΒΓ ad ΕΖ; quare ΑΒ ad ΔΕ majorem habet rationem quam ΒΓ ad ΕΖ. Pariter si minor fuerit ratio ΑΒ *ad* ΒΓ *quam* ΔΕ *ad* ΕΖ; etiam permutando, ΑΒ *ad* ΔΕ *minorem habebit rationem quam* ΒΓ *ad* ΕΖ. Nam si fiat ut ΑΒ ad ΒΓ ita alia quædam ad ΕΖ, minor erit ea quam ΔΕ: reliqua vero eadem sunt.

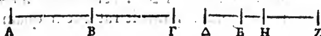


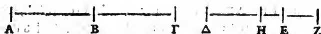
VI. Habeat ΑΓ ad ΓΒ majorem rationem quam ΔΖ ad ΖΕ: per conversionem rationis ΓΑ ad ΑΒ minorem habebit rationem quam ΖΔ ad ΔΕ.

Fiat enim ut ΑΓ ad ΓΒ ita ΔΖ ad aliam quandam, quæ minor erit quam ΖΕ, ut ΖΗ. Per conversionem rationis erit ΑΓ ad ΑΒ ut ΔΖ ad ΔΗ. Sed ΔΖ ad ΔΗ minorem habet rationem quam ΔΖ ad ΔΕ, *quare* ΑΓ *ad* ΑΒ *minorem habet rationem quam* ΔΖ *ad* ΔΕ. Similiter si ΑΓ ad ΓΒ minorem habeat rationem quam ΔΖ ad ΖΕ. Per conversionem rationis, ΑΓ majorem habet rationem ad ΑΒ quam ΔΖ ad ΔΕ.

erit

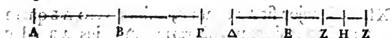
erit enim ut ΑΓ ad ΓΒ ita ΔΖ ad aliam, majorem quam ΖΕ. Cætera evidentia sunt.





VII. Habeat rursus ΑΒ ad ΒΓ majorem rationem quam ΔΕ ad ΕΖ: invertendo ΓΒ ad ΒΑ minorem habet rationem quam ΕΖ ad ΕΔ.

Fiat enim ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad aliam, ut ΕΗ, quæ minor erit quam ΕΖ: invertendo itaque erit ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΕΗ ad ΕΔ. Sed ΕΗ ad ΕΔ minorem habet rationem quam ΖΕ ad ΕΔ; *quare* ΓΒ *ad* ΒΑ *minorem habet rationem quam* ΖΕ *ad* ΕΔ. Similiter si ΑΒ minorem habeat rationem ad ΒΓ quam ΔΕ ad ΕΖ; invertendo ΓΒ ad ΒΑ majorem habebit rationem quam ΖΕ ad ΕΔ. Nam ut ΑΒ ad ΒΓ ita erit ΔΕ ad majorem quam ΕΖ. Reliqua vero manifesta sunt. Ex his etiam consequitur, quod, si ΑΒ majorem habeat rationem ad ΒΓ quam ΔΕ ad ΕΖ, ΕΖ etiam ad ΔΕ majorem habebit rationem quam ΓΒ ad ΒΑ. Si vero ΑΒ ad ΒΓ minorem habeat rationem quam ΔΕ ad ΕΖ, minor quoque erit ratio ΕΖ ad ΔΕ quam ΓΒ ad ΒΑ.



VIII. Habeat ΑΒ ad ΔΕ majorem rationem quam ΒΓ ad ΕΖ: erit ratio ipsius ΑΒ ad ΔΕ major ratione ΑΓ ad ΔΖ.

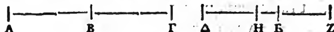
Fiat enim ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΒΓ ad aliam quandam ut ΗΕ, minorem quam ΕΖ: tota igitur ΑΓ ad totam ΔΗ, est ut ΑΒ ad ΔΕ. Sed ΑΓ ad ΔΗ majorem habet rationem quam ad ΔΖ; igitur ΑΒ ad ΔΕ majorem habet rationem quam ΑΓ ad ΔΖ. Ac manifestum est totam ΑΓ ad totam ΔΖ minorem habere rationem quam ΑΒ ad ΔΕ. Quod si minor fuerit ratio partis, totius major erit.



IX. Ha-

IX. Habeat rursus tota ΑΓ ad totam ΔΖ majorem rationem quam ΑΒ ad ΔΕ: residua ΒΓ ad residuam ΕΖ majorem habebit rationem quam ΑΓ ad ΔΖ.

Fiat enim ut ΑΓ ad ΔΖ ita ΑΒ ad ΔΗ; residua igitur ΒΓ ad residuam ΗΖ erit etiam ut ΑΓ ad ΔΖ. Sed ΒΓ ad ΕΖ majorem habet rationem quam ad ΖΗ, quare ratio ΒΓ ad ΕΖ major est ratione ΑΓ ad ΔΖ. Si vero ratio totius ad totam minor fuerit, minor quoque erit ratio residuæ *ad residuam.*



X. Sit ΑΒ major quam Γ, Δ vero ipsi Ε æqualis: majorem habebit rationem ΑΒ ad Γ quam est ratio Δ ad Ε.

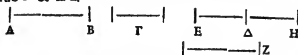
Ponatur enim ΒΖ ipsi Γ æqualis, atque erit ΒΖ ad Γ sicut Δ ad Ε. Sed ΑΒ majorem habet rationem ad Γ quam ΒΖ ad Γ: ΑΒ igitur majorem habet rationem ad Γ quam Δ ad Ε. Patet etiam quod, si minor fuerit ΑΒ quam Γ, ΑΒ minorem haberet rationem ad Γ quam Δ ad Ε, per conversam.



XI. Sed major sit ΑΒ quam Γ, minor vero ΔΕ quam Ζ: dico majorem esse rationem ipsius ΑΒ ad Γ quam ΔΕ ad Ζ.

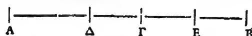
Hoc manifestum est etiam absque demonstratione. Si enim, dum ΔΕ ipsi Ζ æqualis fuerat, ΑΒ majorem habuerit rationem ad Γ quam ΔΕ ad Ζ; jam cum minor eâ ponatur, multo majorem habebit rationem. Hoc autem modo demonstrabitur. Quoniam major est ΑΒ quam Γ; si fiat ut ΑΒ ad Γ ita alia quædam ad Ζ: major erit ea quam Ζ, sicut & quam ΔΕ. Æqualis autem sit ipsi ΕΗ. ΕΗ igitur majorem habet rationem ad Ζ quam ΔΕ ad Ζ. Sed ut ΗΕ ad Ζ ita ΑΒ ad Γ. Quare ratio ΑΒ ad Γ major est ratione ΔΕ ad Ζ. (Ac manifestum est, si ΑΒ minor fuerit quam Γ, minorem semper fore rationem, *quoties ΔΕ vel est æqualis vel major quam* Ζ.) Majus quoque erit rectangulum ΑΒ in Ζ rectangulo ΔΕ in

Γ, æquale enim eſt rectangulo EH in Γ, quod majus eſt contento ſub Γ & ΔE.



XII. Secetur recta AB in puncto Γ. Dico puncta omnia inter A & Γ dividere rectam AB in minores rationes quam habet AΓ ad ΓB: puncta vero omnia inter Γ & B in rationes majores.

Capiantur enim puncta Δ, E ab utrâque parte ipſius Γ. Jam quoniam ΔA minor eſt quam AΓ, ΔB vero major quam BΓ; ΔA minorem habet rationem ad AΓ quam ΔB ad BΓ; permutando itaque AΔ ad ΔB minorem habet rationem quam AΓ ad ΓB. Idemque demonſtratur de punctis omnibus inter A & Γ. Rurſus quia EA major eſt quam AΓ, EB vero minor quam BΓ; EA majorem habebit rationem ad AΓ quam EB ad BΓ: quare permutando AE ad EB majorem habet rationem quam AΓ ad ΓB. Pari modo idem probatur de punctis reliquis inter Γ & B ſumendis.



XIII. Dividatur recta AB bifariam in puncto Γ. Dico rectangulum ad punctum Γ abſciſſum, ſive AΓ in ΓB, majus eſſe quovis alio ſegmentis quibuſlibet aliis contento.

Sumatur enim aliud punctum ut Δ; atque erit rectangulum AΔB, una cum quadrato ipſius ΓΔ, æquale quadrato ex AΓ, hoc eſt rectangulo AΓB. Majus itaque eſt rectangulum AΓ in ΓB rectangulo AΔ in ΔB. Idem conſtat de punctis reliquis.



XIV. Dico quoque quod punctum propius puncto Γ adjacens, rectangulum ſemper efficit majus remotiore.

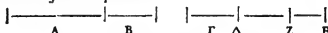
Sumatur enim aliud punctum ut E inter A & Δ. Demonſtrandum eſt majus eſſe rectangulum AΔB rectangulo AEB.

 Quoniam

Quoniam enim rectangulum ΑΔΒ una cum quadrato ex ΔΓ æquale est quadrato ipsius ΑΓ; atque etiam rectangulum ΑΕΒ una cum quadrato ex ΕΓ æquale est eidem quadrato ex ΑΓ: erit rectangulum ΑΔΒ cum quadrato ex ΔΓ æquale rectangulo ΑΕΒ cum quadrato ex ΕΓ. Ex his autem quadratum ex ΔΓ minus est quadrato ex ΕΓ. Rectangulum igitur reliquum ΑΔΒ majus est reliquo rectangulo ΑΕΒ.

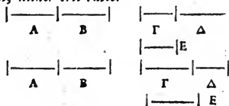
XV. Nam si sit Α una cum Β æqualis ipsi Γ cum ΔΕ; sit vero Β minor quam ΔΕ: major erit Α quam Γ.

Ponatur ΔΖ ipsi Β æqualis: Α igitur una cum ΔΖ æqualis erit ipsi ΔΕ una cum Γ. Communis auferatur ΔΖ; & reliquum Α æquale erit reliquis Γ & ΖΕ simul sumptis; ac propterea Α major erit quam Γ.



XVI. Habeat Α ad Β majorem rationem quam Γ ad Δ. Dico majus esse rectangulum sub Α & Δ rectangulo sub Β & Γ.

Fiat enim ut Α ad Β ita Γ ad Ε: majorem itaque rationem habet Γ ad Ε quam ad Δ, unde minus est Ε quam Δ; ac sumptâ Α in communem altitudinem, minus erit rectangulum Α in Ε rectangulo Α in Δ. Sed rectangulum ΑΕ æquale est rectangulo ΒΓ; minus itaque est rectangulum ΒΓ rectangulo ΑΔ: hoc est, ΑΔ majus est rectangulo ΒΓ. Similiter si minor fuerit ratio, minus quoque erit rectangulum rectangulo. Quinetiam si rectangulum Α in Δ majus fuerit quam Β in Γ, ratio ipsius Α ad Β major erit ratione Γ ad Δ. Ponatur enim ipsi ΑΔ æquale rectangulum ΒΕ; majus ergo erit rectangulum ΒΕ quam ΒΓ; unde & Ε major erit quam Γ. Sed ut Α ad Β, ita Ε ad Δ. Est vero ratio Ε ad Δ major ratione Γ ad Δ; adeoque etiam ratio Α ad Β major erit. *Pariter si minus fuerit rectangulum, minor erit ratio.*



XVII. Inter

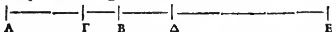
XVII. Inter duas rectas A B, B Γ media proportionalis sit B Δ, ac fiat Δ E ipsi A Δ æqualis. Dico Γ E excessum esse quo utræque A B, B Γ simul sumptæ superant illam quæ potest quater rectangulum A B in B Γ.

Quoniam enim utræque A B, B Γ excedunt utrasque A B, B E differentiâ Γ E, erit Γ E excessus quo utræque A B, B Γ, utrasque A B, B E excedunt; ipsæ autem A B, B E simul sumptæ duæ sunt B Δ. Sed duæ B Δ possunt quater rectangulum A B in B Γ. Quare Γ E excessus est quo utræque A B, B Γ simul sumptæ superant illam quæ potest quater rectangulum A B Γ.



XVIII. Rursus sit B Δ media proportionalis inter A B, B Γ; ac fiat Δ E ipsi Δ A æqualis. Dico rectam Γ E componi ex utrisque A B, B Γ, & ex illâ quæ potest quater rectangulum A B, B Γ simul sumptis.

Quoniam enim Γ E componitur ex ipsis Γ Δ, Δ E; ac A Δ æqualis est ipsi Δ E; componetur etiam Γ E ex ipsis A Δ, Δ Γ; hoc est ex utrisque A B, B Γ & duabus B Δ simul sumptis. Sed duæ B Δ possunt quater rectangulum A B in B Γ. Recta igitur Γ E composita est ex utrisque A B, B Γ & ex eâ quæ potest quater rectangulum A B in B Γ.



XIX. Rursus B Δ sit media proportionalis inter A B, B Γ, & ponatur Δ E ipsi Γ Δ æqualis. Dico rectam A E excessum esse quo utræque A B, B Γ superant illam quæ potest quater rectangulum A B, B Γ.

Quoniam enim utræque A B, B Γ superant utrasque E B, B Γ, excessu A E; ac utræque E B, B Γ duæ sunt B Δ, sive illa quæ potest quater rectangulum A B in B Γ. Igitur A E est excessus quo utræque A B, B Γ superant illam quæ potest quater rectangulum A B, B Γ.



XX. Rursus sit ΒΔ media proportionalis inter ΑΒ, ΒΓ; & ponatur ΔΕ ipsi ΓΔ æqualis. Dico rectam ΑΕ componi ex utrisque ΑΒ, ΒΓ & ex eâ quæ potest quater rectangulum ΑΒ in ΒΓ.

Quoniam enim ΑΕ componitur ex ipsis ΑΔ, ΔΕ; ac ΔΕ ipsi ΓΔ æqualis est: componetur itaque ΑΕ ex ipsis ΑΔ, ΔΓ; hoc est ex utrisque ΑΒ, ΒΓ & ex duabus ΒΔ. Sed duæ ΒΔ possunt quater rectangulum ΑΒ, ΒΓ. Composita est igitur recta ΑΕ ex utrisque ΑΒ, ΒΓ & ex eâ quæ potest quater rectangulum ΑΒ in ΒΓ.



Assumuntur Lemmata hæc tum ad *Sectionem Rationis*, tum ad *Sectionem Spatii*; diverso tamen modo.

Problema ad secundum de Sectione Rationis; *utile ad Recapitulationem Loci decimi tertii.*

Datis duabus rectis ΑΒ, ΒΓ, sumere in productâ ΑΔ punctum datum Δ, tale ut ΒΔ eandem habeat rationem ad ΔΑ, quam habet ΓΔ ad excessum quo utræque ΑΒ, ΒΓ superant illam quæ potest quater rectangulum ΑΒ in ΒΓ.

Puta factum, & sit excessus ille recta ΑΕ (in præmissis enim invenimus eam) est igitur ΒΔ ad ΔΑ ut ΓΔ ad ΑΕ; quare permutando ac dividendo, dein *conferendo* rectangulum *extremorum* cum rectangulo *mediorum*, rectangulum ΒΓ in ΕΑ æquale erit rectangulo ΓΔ in ΔΕ. Datum autem est rectangulum ΒΓ in ΕΑ, ac proinde datur ΓΔ in ΔΕ; quod quidem applicatur ad rectam datam ΓΕ excedens quadrato: datum igitur est punctum Δ. Componetur autem hoc modo. Sit excessus ille recta ΕΑ, & applicetur rectangulum æquale rectangulo ΒΓΕ excedens quadrato ad rectam ΓΕ; nempe rectangulum ΓΔ in ΔΕ. Dico punctum Δ esse punctum quæsitum. Quoniam enim rectangulum ΒΓ in ΕΑ æquale est rectangulo ΓΔ in ΔΕ: Resolutâ in proportionem æqualitate, dein componendo & permutando, erit ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΔ ad ΑΕ, quæ excessus est. Eodem modo fiet, si velimus sumere

mere punctum tale, ut ΒΔ fit ad ΔΑ ut ΓΔ ad rectam compositam ex utrisque ΑΒ, ΒΓ & illâ quæ potest quater rectangulum ΑΒ, ΒΓ. Q. E. D.



Primus liber de *Sectione Rationis* habet Loca septem, Casus viginti quatuor, Diorismos quinque; quorum tres sunt Maximi, duo vero Minimi. Et Maximus quidem est ad Casum tertium Loci Vti. Minimi autem sunt ad Casus secundos Locorum VIti & VIImi. Maximi reliqui sunt ad Casus quartos eorundem Locorum VIti & VIImi. Secundus de *Sectione Rationis* [*habet Loca quatuordecim, Casus* LXIII. *Diorismos vero ex primo, ad quem totus refertur. Primus liber de Sectione Spatii*] habet loca septem, Casus XXIV. Diorismos septem, quorum quatuor Maximi sunt, tres autem Minimi. Maximus autem est ad Casum II. Loci primi, ut & ad primum [*secundi Loci*; *similiter ad secundum*] quarti, [*& ad tertium sexti Loci. Minimi vero sunt*] ad tertium Casum tertii Loci, ad quartum quarti, & ad primum sexti. Secundus liber de *Sectione Spatii* Loca habet XIII. Casus LX. & Diorismos ex primo, ad quem totus refertur.

Quæret fortasse aliquis unde factum sit, ut secundus liber de *Sectione Rationis* quatuordecim Loca contineat, cum idem de *Sectione Spatii* tredecim tantum habeat. Fit autem ob hanc causam; quia septimus Locus in *Sectione Spatii* omissus est, ut manifestus. Nam si utræque parallelæ cadant super terminos datos, quæcunque recta ducta fuerit, abscindet rectangulum datum; æquale nempe illo quod continetur sub duabus interceptis inter terminos & concursum ambarum rectarum principalium positione datarum. Hoc autem aliter se habet in *Sectione Rationis*. Quapropter excedit uno Loco ad septimum secundi, atque ita deinceps.

APOL-

APOLLONII PERGÆI

De Sectione rationis,

SIVE

ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ,

LIBER PRIOR.

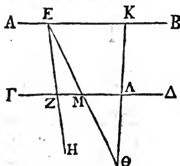
SINT duæ rectæ lineæ infinitæ in eodem plano positione datæ, quæ vel invicem æquidistent vel sese intersecent; & datum sit in utrâque illarum punctum: sitque etiam ratio data: & præterea datum sit punctum extra rectas datas. Ducere oportet à puncto dato lineam rectam, quæ occurrens rectis positione datis, ab ipsis auferat segmenta quæ sint inter se in ratione datâ.

Primo sint duæ rectæ positione datæ invicem parallelæ ut ΑΒ, ΓΔ; & sumatur in rectâ ΑΒ punctum Ε, & in ΓΔ punctum Ζ: rectaque rectis datis occurrens sit ΕΖΗ. Cadet autem punctum datum vel intra angulum ΔΖΗ, vel intra angulos ΒΕΖ, ΔΖΕ, vel intra spatia iisdem adjacentia.

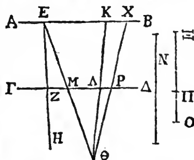
LOCUS PRIMUS.

Cadat autem primo intra angulum ΔΖΗ, ut punctum Θ. Rectæ vero lineæ, quæ à puncto Θ ductæ auferunt à rectis positione datis segmenta, datis punctis Ε, Ζ adjacentia, in ratione datâ, admittunt tres casus; quatenus vel resecantur segmenta ex ΕΒ, ΖΔ, vel ex ΕΑ, ΖΔ, vel denique ex ipsis ΕΑ, ΖΓ.

Caſ. I. Cadat autem recta ſecundum modum primum, ut recta Θ K. Auferat iſthæc à rectis E B, Z Δ ſegmenta E K, Z Λ, habentia inter ſe rationem rationi datæ æqualem; ac jungatur recta E Θ. Poſitione igitur data eſt ipſa E Θ. Sed etiam Γ Δ poſitione datur, datum eſt igitur punctum M. Quoniam autem dantur puncta E, M, Θ, etiam datur ratio rectæ [E M ad M Θ, & componendo datur quoque ratio] E Θ ad Θ M. Verum ratio E Θ ad Θ M æqualis eſt rationi E K *ad* M Λ, *quare ratio* E K *ad* M Λ *data eſt. Datur autem ratio* E K *ad* Z Λ, *quare ratio* Z Λ *ad* M Λ *quoque datur*; *ac dividendo ratio* M Z *ad* M Λ *etiam data eſt. Sed recta* Z M *magnitudine datur, adeoque ipſa* M Λ *magnitudine data eſt*; *& ob datum punctum* M *punctum* Λ *quoque datur*: *unde recta* Θ Λ K *poſitione datur. Quoniam autem recta* M Λ *minor eſt quam* Z Λ, *ratio* E K *ad* M Λ *ſive* E Θ *ad* Θ M *major erit ratione* E K ad Z Λ, hoc eſt, ratione data. Oportet igitur rationem datam minorem eſſe ratione E Θ ad Θ M.



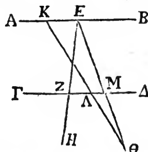
Componetur autem Problema hoc modo. Manente figurâ jam deſcriptâ, ac junctâ rectâ E Θ: manifeſtum eſt rationem datam minorem eſſe debere ratione E Θ ad Θ M. Eſto igitur illa æqualis rationi N ad Ξ O. Ac fiat ut E Θ ad Θ M ita N *ad* Ξ Π, *minorem quam* Ξ O; *dein fiat ut* O Π *ad* Π Ξ, ita Z M ad M Λ: & connexa Θ Λ producatur in directum. Dico quod recta Θ Λ K ſola ſolvit problema. Quod ſic oſtenditur. Quoniam Z M eſt ad M Λ ut O Π ad Π Ξ, erit componendo Z Λ ad Λ M ut Ξ O ad Ξ Π: ac invertendo ut Λ M ad Z Λ ita Π Ξ ad Ξ O. Cum autem E Θ eſt ad Θ M ut E K ad M Λ, erit etiam E K ad M Λ ſicut N ad Ξ Π. Sed M Λ eſt ad Λ Z ut Π Ξ ad Ξ O; adeoque ex æquo erit E K ad Λ Z ut N ad Ξ O. Ducta eſt igitur



igitur recta ΘK per punctum Θ, quæ aufert ſegmenta EK, ZΛ habentia inter ſe rationem rationi datæ æqualem. Recta igitur ΘK ſolvit problema. Aio autem illam ſolam hoc præſtare. Nam ſi fieri poteſt, alia idem efficiat, ut recta ΘX. Aufert ergo recta ΘX rationem EX ad ZP æqualem rationi datæ. Quoniam vero ΛM minor eſt quam recta ΛZ, erit ratio PΛ ad ΛM major ratione PΛ ad ΛZ. Et componendo erit ratio PM ad MΛ major ratione PZ ad ΛZ. Ut autem PM ad MΛ, ita XE ad EK: ergo ratio XE ad EK major eſt ratione PZ ad ΛZ: ac permutando erit ratio XE ad PZ major ratione EK ad ZΛ. Oſtenſum autem eſt rectam ΘK problema ſolvere, id quod non præſtat altera, adeoque ea ſola.

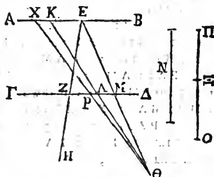
Manifeſtum autem eſt quod rectæ puncto Z propiores, rationes minores abſcindunt quam remotiores ab eo.

Caſ. II. Iiſdem manentibus ducatur, juxta caſum ſecundum, recta ΘK auferens à rectis EA, ZΔ rationem EK ad ZΛ æqualem rationi datæ; & jungatur recta EΘ. Poſitione igitur datur EΘ. Data autem eſt poſitione ΓΔ; datur itaque punctum M; utraque adeo recta ΘE, ΘM datur: quare ratio EΘ ad ΘM etiam datur. Eſt autem EΘ ad ΘM ut EK ad ΛM; quare ratio KE ad ΛM datur. Sed ratio KE ad ZΛ data eſt; ratio igitur ZΛ ad ΛM data erit. Et componendo ratio ZM ad MΛ datur; adeoque cum recta ZM magnitudine data ſit, etiam ipſa ΛM magnitudine data erit. Datum autem eſt punctum M, quare punctum Λ datum erit; ac dato puncto Θ, datur poſitione recta ΘΛK. Quoniam autem recta ΛM poteſt eſſe vel æqualis ipſi ΛZ, vel major vel minor ea; igitur rationes non habent limites.



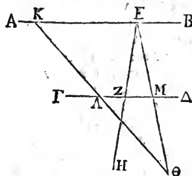
Componetur autem problema hoc modo. Permanente figura jam deſcripta, jungatur recta EΘ; ſitque ratio data eadem quæ N ad ΞO. Et fiat N ad ΞΠ ſicut EΘ ad ΘM; ac ut OΠ ad ΠΞ ſic ZM ad MΛ. Jungatur ΘΛ ac producatur in K. Dico rectam ΘK ſolvere problema, ſive KE

esse ad Z Λ ut N ad Ξ O. Quoniam autem E Θ est ad Θ M ut K E ad Λ M, necnon ut N ad Π Ξ; erit etiam K E ad Λ M ut N ad Π Ξ. Item quia O Π est ad Π Ξ ut Z M ad M Λ, erit, dividendo & invertendo, Λ M ad Λ Z ut Π Ξ ad Ξ O. Quare ex æquo erit K E ad Z Λ ut N ad Ξ O. Recta itaque Θ K solvit problema. Dico autem illam solam hoc præstare. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut recta Θ X, auferens rationem X E ad P Z rationi datæ parem. Sed X E *major est quam* E K, *ac* Z P *minor quam* Z Λ; *unde* ratio X E ad Z P major est ratione E K ad Z Λ, adeoque recta X Θ majorem aufert rationem quam K Θ.



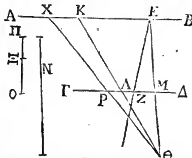
Manifestum autem est rectas puncto Z propiores, rationes majores abscindere quam rectæ remotiores ab illo.

Cas. III. Iisdem autem manentibus, ducatur secundum casum tertium, recta Θ K auferens è rectis E A, Z Γ rationem E K ad Z Λ rationi datæ æqualem; ac jungatur E Θ. Datur igitur positione ipsa E Θ. Sed ob rectam Γ Δ positione datam, punctum M & ratio E Θ ad Θ M etiam dantur. Est autem ut E Θ ad Θ M ita E K ad Λ M: quare ratio E K ad Λ M datur. Sed ratio E K ad Z Λ datur, adeoque etiam ratio M Λ ad Z Λ data est: ac dividendo ratio M Z ad Z Λ datur. At recta M Z datur, quare recta Z Λ positione & magnitudine datur. Punctum autem Z datum est, adeoque & punctum Λ datur: ac dato puncto Θ, recta Θ Λ K positione datur. Quoniam autem Z Λ minor est Λ M, erit ratio E K ad Z Λ major ratione E K ad Λ M. At vero E K est ad Λ M ut E Θ ad Θ M; quapropter ratio E K ad Z Λ major est ratione E Θ ad Θ M: adeoque ratio data major esse debet ratione E Θ ad Θ M.



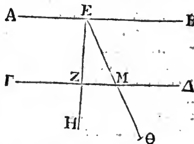
Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam

jam descripta, connectatur recta ΕΘ. Oportet enim rationem datam majorem esse ratione ΕΘ ad ΘΜ. Sit adeo ratio Ν ad ΞΠ major ratione ΕΘ ad ΘΜ. Fiatque ut ΕΘ ad ΘΜ ita Ν ad ΟΠ; & ut ΟΞ ad ΞΠ ita ΜΖ ad ΖΛ; & ducatur & producatur ΘΛ ad Κ. Dico rectam ΘΛΚ solvere problema. Quoniam enim ΜΖ est ad ΖΛ ut ΟΞ ad ΞΠ, erit componendo ΜΛ ad ΛΖ ut ΟΠ ad ΠΞ. Item quia ΕΘ est ad ΘΜ, sive ΕΚ ad ΜΛ, ut Ν ad ΟΠ; atque etiam ΜΛ ad ΛΖ ut ΠΟ ad ΠΞ: ex æquo erit ΕΚ ad ΛΖ ut Ν ad ΠΞ. Recta itaque ΘΚ solvit problema. Dico & eam solam. Nam si fieri possit, ducatur alia, ut recta ΘΧ, abscindens rationem ΧΕ ad ΡΖ rationi datæ æqualem. Quoniam autem recta ΛΖ minor est quam ΛΜ, erit ratio ΡΛ ad ΛΖ major ratione ΡΛ ad ΛΜ: ac Componendo erit ratio ΡΖ ad ΖΛ major ratione ΡΜ ad ΜΛ. At ΡΜ est ad ΜΛ ut ΧΕ ad ΕΚ; quare ratio ΧΕ ad ΕΚ minor est ratione ΡΖ ad ΖΛ: ac permutando, ratio ΧΕ ad ΡΖ minor erit ratione ΚΕ ad ΛΖ. Recta igitur ΘΚ majorem abscindit rationem quam recta ΘΧ.



Rectæ autem ductæ propiores puncto Ζ, majores abscindunt rationes quam quæ sunt remotiores ab eo.

Resolvimus ergo problema secundum omnes modos, atque compositionem illius ostendimus. Iisdem autem manentibus ducatur recta ΕΘ: & ratio data vel minor erit quam ratio ΕΘ ad ΘΜ, vel ei æqualis, vel denique major. Si autem fuerit ratio data minor ratione ΕΘ ad ΘΜ, componetur quidem problema juxta duos modos, nempe primum & secundum. Sed componi nequit modo tertio, quia ratio data non est major ratione ΕΘ ad ΘΜ. Si fuerit data ratio æqualis rationi ΕΘ ad ΘΜ, componetur quidem problema secundo modo. Non autem componi potest modo primo,



primo, quia ratio data non eſt minor ratione ΕΘ ad ΘΜ. Neque ſane modo tertio, quia ratio data non eſt major ea. Si denique major fuerit ratione ΕΘ ad ΘΜ, patet problema ſolvi poſſe duobus modis, *ſecundo ſcil. ac tertio, non autem primo*, quia ratio data non eſt minor ea.

LOCUS SECUNDUS.

Eſto jam punctum datum intra angulos ΒΕΖ, ΕΖΔ, ut eſt punctum Θ: rectæ autem ductæ per punctum Θ abſcindant rectas punctis Ε, Ζ adjacentes, quæ ſint inter ſe in ratione data. Hoc autem fiet ſecundum tres caſus; aut enim eas abſcindet à rectis ΕΒ, ΖΔ, aut à rectis ΕΑ, ΖΔ, vel denique à rectis ΕΒ, ΖΓ.

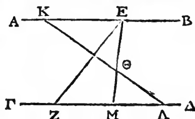
*Caſ.*I. Agatur ideo recta, ſecundum caſum primum, ut recta ΚΛ, abſcindens à rectis ΕΒ, ΖΔ rationem ΕΚ ad ΖΛ rationi datæ æqualem; & connexa ΕΘ producatur in Μ: recta itaque ΕΜ poſitione datur. Sed recta ΓΔ poſitione data eſt: quare datur & punctum Μ, adeoque ratio ΕΘ ad ΘΜ data eſt. Eſt autem ΕΘ ad ΘΜ ut ΕΚ ad ΜΛ. Verum ratio ΕΚ ad ΛΖ datur, adeoque ex æquo ratio ΖΛ ad ΜΛ datur: & componendo ratio ΖΜ ad ΜΛ etiam datur. Recta autem ΖΜ magnitudine datur; quare recta ΜΛ tam magnitudine quam poſitione datur. Cumque punctum Μ datur, etiam punctum Λ datur: ac dato puncto Θ, recta quoque ΚΘΛ poſitione datur. Quoniam autem alterutra è rectis ΖΛ, ΛΜ poteſt eſſe major altera, rationes hoc in caſu non habent limites.

Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam deſcripta, jungatur ΕΘ ac producatur in Μ. Sit ratio data ut Ν ad ΞΟ: fiatque Ν ad ΠΞ ut ΕΘ ad ΘΜ; & ut ΠΞ ad ΟΞ ita ΜΛ ad ΖΛ: & ducatur ΛΘ producaturque. Dico rectam

Α Θ Κ problema solvere. Quoniam enim Ε Θ est ad Θ Μ, hoc est Ε Κ ad Λ Μ, ut Ν ad Π Ξ; & Λ Μ ad Λ Ζ ut Π Ξ ad Ξ Ο, per constructionem; erit ex æquo, Ε Κ ad Λ Ζ ut Ν ad Ξ Ο. Quare recta Κ Λ solvit problema. Aio insuper eam solam hoc præstare. Nam si fieri potest, ducatur alia ut recta Χ Θ Ρ. Quoniam autem recta Ε Κ major est recta Ε Χ, & recta Ζ Λ minor quam ipsa Ρ Ζ, erit ratio Ε Κ ad Ζ Λ major ratione Ε Χ ad Ρ Ζ: adeoque abscindet recta Λ Κ rationem majorem quam recta Χ Ρ.

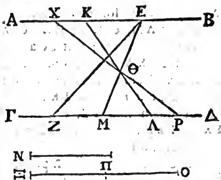
Unde & rectæ puncto Ζ propiores, abscindent rationes majores quam quæ ab eodem puncto sunt remotiores.

Cas. II. Dein ducatur, modo secundo, recta Κ Λ auferens à rectis Ε Α Ζ Δ rationem Ε Κ ad Ζ Λ æqualem rationi datæ; & jungatur recta Ε Θ, producaturque ad Μ: datur igitur positione recta Ε Μ. Sed positione data est recta Γ Δ, adeoque punctum Μ datum est: quare & ratio Ε Θ ad Θ Μ datur. Verum ut Ε Θ ad Θ Μ ita Ε Κ ad Μ Λ: atque etiam data est ratio Ε Κ ad Ζ Λ: quare ratio Ζ Λ ad Μ Λ datur; ac dividendo, ratio Ζ Μ ad Μ Λ etiam datur. At Ζ Μ magnitudine datâ, datur quoque recta Μ Λ magnitudine & positione: datoque puncto Μ, datur etiam punctum Λ: ac cum punctum Θ datur, recta quoque Κ Θ Λ positione datur. Quoniam vero Ζ Λ major est quam Λ Μ, erit ratio Ε Κ ad Λ Μ, hoc est Ε Θ ad Θ Μ, major ratione Ε Κ ad Ζ Λ; quare ratio ad componendum proposita minor esse debet ratione Ε Θ ad Θ Μ.



Componetur autem problema hoc modo. Manentibus descriptis, sit ratio data æqualis rationi Ν ad Ξ Ο, quæ sit minor ratione Ε Θ ad Θ Μ: fiatque ut Ε Θ ad Θ Μ ita Ν ad Π Ο, & ut Ξ Ο ad Π Ο ita Ζ Λ ad Μ Λ: & connectatur Λ Θ producaturque. Dico rectam Λ Θ Κ solvere problema. Quoniam enim Ε Θ est ad Θ Μ, hoc est Ε Κ ad Μ Λ, ut Ν ad Π Ο; atque etiam Μ Λ ad Λ Ζ ut Π Ο ad Ξ Ο; erit ex æquo Ε Κ ad Λ Ζ ut Ν ad Ξ Ο: quare recta Κ Λ solvit problema. Dico autem eam solam hoc præstare. Nam si fieri possit, ducatur alia quævis ut recta Χ Ρ. Quoniam igitur Λ Ζ major est recta

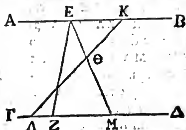
Λ Μ,



Λ M, erit ratio P Λ ad Λ Z minor ratione ejusdem ad rectam Λ M: atque componendo, ratio Z P ad Z Λ minor erit ratione P M ad M Λ. Verum P M est ad M Λ ut X E ad E K. Quare ratio Z P ad Z Λ minor est ratione X E ad E K: ac permutando, ratio Z P ad X E minor est ratione Z Λ ad E K. Sola igitur recta K Λ solvit problema.

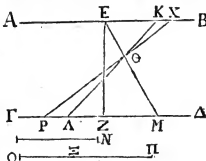
Manifestum autem est rectas propiores puncto Z, rationes majores auferre quàm rectæ ab illo remotiores.

Cas. III. Jam ducta sit recta K Λ, modo tertio, auferens a rectis E B, Z Γ rationem E K ad Z Λ rationi datæ æqualem. Jungatur E Θ, producaturq; ad M *in recta* Γ Δ. Ac recta E M positione datur, adeoque punctum M datur: datisque punctis E, Θ, datur ratio ipsarum E Θ, Θ M. Verum E Θ est ad Θ M ut E K ad Λ M, adeoque ratio E K ad Λ M datur. Sed ratio E K ad Z Λ data est: quare ratio M Λ ad Λ Z datur; ac dividendo, data erit ratio M Z ad Λ Z. Cum autem recta M Z datur, data est etiam recta Z Λ magnitudine & positione: ac ob punctum Z datum habetur punctum Λ, adeoque recta K Θ Λ positione datur. Quoniam vero recta Λ Z minor est recta Λ M, erit ratio E K ad Z Λ major ratione E K ad Λ M. Verum E K est ad Λ M ut E Θ ad Θ M; quare ratio E K ad Z Λ major est ratione E Θ ad Θ M. Sed ratio E K ad Z Λ rationi datæ æqualis est: oportet itaque rationem ad componendum datam majorem esse ratione E Θ ad Θ M.



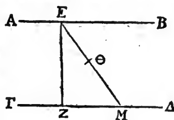
Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam descripta, sit ratio data, nempe ratio N ad Ξ O, major ratione E Θ ad Θ M: fiatque ut E Θ ad Θ M ita N ad Π O; necnon ut Π Ξ ad Ξ O ita M Z ad Z Λ: & jungatur Λ Θ producaturque. Dico rectam Λ Θ K solvere problema. Quoniam enim M Z est ad Z Λ ut Π Ξ ad Ξ O, erit componendo

ΜΛ ad ΖΛ ut ΠΟ ad ΞΟ. Verum ΕΘ est ad ΘΜ, hoc est ΕΚ ad ΛΜ, ut Ν ad ΠΟ: Quare ex æquo ΕΚ erit ad ΖΛ ut Ν ad ΞΟ. Recta itaque ΚΛ solvit Problema. Dico etiam eam solam hoc præstare. Nam si fieri potest, ducatur alia recta ut ΧΡ. Quoniam vero recta ΜΛ major est recta ΖΛ, erit ratio ΡΛ ad ΛΜ minor ratione ΡΛ ad ΛΖ; ac componendo ratio ΡΜ ad ΜΛ minor erit ratione ΡΖ ad ΖΛ. At ratio ΡΜ ad ΜΛ est ut ΧΕ ad ΕΚ; quare ratio ΧΕ ad ΕΚ minor est ratione ΡΖ ad ΖΛ; ac alternando ratio ΧΕ ad ΡΖ minor erit ratione ΕΚ ad ΖΛ. Sola itaque ΛΚ solvit problema.



Manifestum autem est rectas puncto Ζ propiores, majores rationes abscindere quam quæ ab eodem remotiores sunt.

Invenimus adeo Resolutionem atque etiam Compositionem Problematis, secundum ejus tres Casus. Iisdem vero manentibus, si jungatur ΕΘ producaturque in Μ; erit quidem ratio data vel æqualis rationi ΕΘ ad ΘΜ, vel major illa, vel minor. Si vero ratio data æqualis fuerit rationi ΕΘ ad ΘΜ, propositio construetur secundum formam unicam eamque primam: non enim ad formam secundam, quia ratio data non est minor ratione ΕΘ ad ΘΜ; neque ad formam tertiam, quia ratio data non est major ratione ΕΘ ad ΘΜ. Dein si ratio data sit minor ratione ΕΘ ad ΘΜ, construetur problema duabus formis, nempe prima & secunda: non autem forma tertia, quia ratio non est major ratione ΕΘ ad ΘΜ. Si denique ratio data sit major ratione ΕΘ ad ΘΜ, problema construetur secundum duas formas, primam ac tertiam; non potest autem construi forma secunda, quia ratio data non est minor ratione ΕΘ ad ΘΜ.



SCHOLION.

Paulo generalius, ac sane non minus concinne, problemata hæc in rectis parallelis efficiuntur hunc in modum.

Sint duæ rectæ parallelæ A B, Γ Δ, *positione datæ; ac sumatur in* A B *punctum* E, *in* Γ Δ *punctum* Z: *sitque ratio ad construendum proposita sicut* Σ *ad* T. *Fiat* E K *æqualis ipsi* Σ, *ac* Z Λ, Z M, *ab utraque parte puncti* Z, *æquales termino alteri rationis* T. *Junge* K Λ, K M, *quæ occurrant rectæ datæ* E Z *productæ in datis punctis* H, Θ. *Dico rectas omnes per puncta illa* H, Θ *transeuntes, rectisque* A B, Γ Δ *occurrentes, auferre rationes æquales rationi* Σ *ad* T. *Etenim* E Θ *est ad* Θ Z *ut* E K *ad* Z M, *hoc est ut* Σ *ad* T; *ac* P E *est ad* Z Π *ut* E Θ *ad* Θ Z; *igitur* P E *est ad* Z Π *sicut* Σ *ad* T. *Similiter* H E *est ad* H Z *ut* E K *ad* Z Λ, *sive ut* Σ *ad* T. *Sed* O E *est ad* Z Ξ *sicut* H E *ad* H Z: *ergo* O E *est ad* Z Ξ *in ratione* Σ *ad* T. *Quocirca dato puncto quovis* N, *vel intra vel extra parallelas datas, rectæ duæ* H N, N Θ *productæ satisfacient problemati. Quod si altera è rectis* H N, N Θ *parallela fuerit ipsis* A B, Γ Δ, *adeoque iisdem non occurrens; altera tantum solutionem præstabit: hoc etenim in casu, ratio* N P *ad* N Π *eadem est cum ratione datâ* Σ *ad* T *sive* E H *ad* H Z. *Hinc etiam consequuntur omnia quæ de rationum limitibus demonstravit* Apollonius, *quem Constructionis hujus compendium latuisse vix credibile est; sed potius methodum hanc suam prætulisse arbitror, utpote sequentibus magis analogam. Patet quoque rectam* H E *harmonice dividi in punctis* Z, Θ; *quia* H E *est ad* Z H *ut* Θ E *ad* Z Θ.

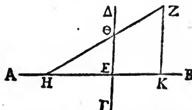
LOCUS TERTIUS.

Jam rectæ positione datæ A B, Γ Δ, secent se mutuo in puncto E; ac in utrâque sumatur commune punctum E.

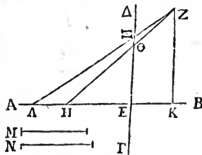
Punctum

Punctum autem datum cadet vel intra angulum ΔEB, vel intra angulum eidem deinceps. Efficitur autem in quovis angulo quod in angulo ΔEB effectum est. Detur itaque punctum Z intra angulum ΔEB; ac ducendæ sint rectæ per punctum Z, quæ auferant à rectis per punctum E, segmenta quæ sint inter se in ratione data. Hoc autem fiet juxta tres modos: vel enim abscissa erit ratio à rectis AE, EΔ, vel à rectis ΓE, EB, vel denique à BE, EΔ.

Cas. I. Ducatur autem primo recta ZH, juxta modum primum, auferens à rectis AE, EΔ, rationem ΘE ad EH rationi datæ æqualem. Et per punctum Z agatur recta parallela rectæ EΔ usque ad K; erit ergo ZK positione data. Sed & recta AB positione datur, punctum itaque K datum est. Quoniam vero ratio EΘ ad EH datur, erit etiam ratio ZK ad KH data. Cumque ZK datur, etiam ZH data erit magnitudine & positione: ac ob datum punctum K, punctum H quoque datum erit. Punctum autem Z datur, quare recta HZ positione data est. Et manifestum est rationem datam minorem esse debere ratione ZK ad KE.



Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam descripta, ducatur recta KZ rectæ ΔE parallela; sitque ratio data minor ratione ZK ad KE, nempe ratio M ad N. Fiat ut M ad N ita ZK ad KH, ac connectatur recta HZ. Dico rectam HZ solvere problema. Quoniam enim ZK est ad KH ut ΘE ad EH, atque etiam ut M ad N; erit adeo ΘE ad EH ut M ad N. Recta itaque HZ solvet problema. Dico præterea eam solam hoc præstare. Nam si fieri potest, ducatur alia recta, ut ZΛ. Quoniam recta HK minor est recta KΛ, erit ratio ZK ad KH major ratione ZK ad KΛ. Verum ZK est ad KH ut ΘE ad EH; & ZK est ad KΛ ut ΞE ad EΛ: quare ratio ΘE ad EH major est ra-

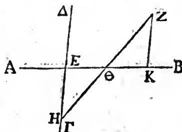


 tione

tione Ξ E ad E Λ. Quapropter recta Z Λ non abſcindit rationem rationi datæ æqualem. Conſimili argumento liquet nullam aliam rectam præter ſolam Z H ſolvere problema.

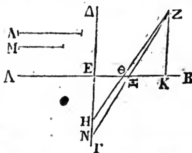
Manifeſtum autem eſt rectas puncto E propiores, majores ſemper rationes abſcindere, quam rectæ remotiores ab illo.

Caſ. II. Dein ducta ſit recta modo ſecundo, ut Z H, auferens à rectis Γ E, E B, rationem rationi datæ æqualem. Per punctum Z acta ſit recta Z K rectæ Γ Δ parallela: eritque Z K poſitione data; ac ob rectam A B poſitione datam, punctum K datum erit. At ratio H E ad E Θ data eſt, adeoque ratio Z K ad K Θ etiam datur. Recta autem Z K data eſt; quare etiam K Θ magnitudine & poſitione data erit: ac dato puncto K, punctum quoque Θ datum eſt.



Atqui punctum Z datur, adeoque recta Z Θ H datur poſitione. Conſtat autem oportere rationem datam majorem eſſe ratione Z K ad K E.

Componetur autem Problema hoc modo. Manente figura jam deſcripta; ſit ratio data major ratione Z K ad K E, nempe ratio Λ ad M. Fiat ut Λ ad M ita Z K ad K Θ, ac juncta Z Θ producatur ad H. Dico rectam Z H ſolvere Problema, eamque ſolam. Quoniam enim Z K eſt ad K Θ ut H E ad E Θ, erit H E ad E Θ ſicut Λ ad M. Recta itaque Z H ſolvit Problema. Dico & hanc ſolam id præſtare. Nam ſi fieri poteſt, ducatur alia ut recta Z N. Quoniam autem recta



K Ξ minor eſt quam K Θ, erit ratio Z K ad K Ξ major ratione Z K ad K Θ. Eſt autem Z K ad K Ξ ut N E ad E Ξ, & Z K ad K Θ ut E H ad E Θ: quare ratio N E ad E Ξ major eſt ratione H E ad E Θ, adeoque rationi datæ æqualis non eſt. Recta igitur Z N non ſolvit problema. Pari argumento liquet nullam aliam rectam præter Z H ſolvere problema.

Manifeſtum autem eſt rectas puncto E propiores, ſemper

per rationes minores abſcindere quam remotiores ab illo.

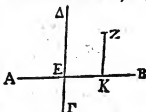
Caſ. III. Jam ducta ſit recta, ut H Θ, juxta modum tertium, auferens à rectis B E, E Δ, rationem rationi datæ æqualem. Age rectam Z K rectæ Γ Δ parallelam; erit igitur recta Z K poſitione data. Sed recta quoque E B poſitione data eſt; adeoque punctum K datur. Ratio autem H E ad E Θ data eſt; quare ratio Z K ad K Θ datur: ac ob rectam Z K magnitudine datam, recta etiam K Θ datur magnitudine & poſitione. Dato autem puncto K, punctum quoque Θ datum erit: ac puncto Z dato, recta Θ Z H poſitione datur. Ratio autem non eſt determinata, quia K E poteſt eſſe vel æqualis ipſi K Θ, vel illa major vel minor.

Componetur autem problema hoc modo. Manente figura jam deſcripta, rationi datæ æqualis ſit ratio Λ ad M: fiatque ut Λ ad M ita Z K ad K Θ; & jungatur Θ Z producaturque in H. Dico rectam Θ H ſolam ſolvere problema. Quoniam enim Z K eſt ad K Θ * ut Λ ad M, erit etiam H E ad E Θ ut Λ ad M; adeoque recta H Θ ſolvit problema. Dico & hanc ſolam id præſtare. Etenim ſi fieri poteſt, ducatur altera ut N Ξ. Quoniam autem recta N E major eſt recta H E, recta vero E Ξ minor eſt ipſa E Θ; ratio N E ad E Ξ major erit ratione H E ad E Θ, adeoque illi æqualis non eſt. Unde manifeſtum eſt nullam aliam rectam problema ſolvere præter ipſam H Θ. Patet etiam rectas propiores puncto E, ſecundum rectam Γ Δ, auferre rationes minores quam quæ ſecantur à remotioribus ab eo.

Invenimus itaque reſolutionem problematis juxta omnes modos; ejuſdemque compoſitionem oſtendimus per omnes caſus ejus. Manentibus autem deſcriptis, ac ducta recta parallela

* *Hactenus pertigit Traductio D. Bernardi.*

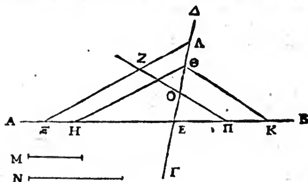
rallela ZK; Ratio data vel minor erit ratione ZK ad KE, vel major illa, vel æqualis illi. Quod si fuerit minor ratione ZK ad KE, componetur problema duobus modis, nempe primo ac tertio; non autem modo secundo, quia ratio data non est major quam ratio ZK ad KE. Si fuerit major quam ratio ZK ad KE,



componetur problema duobus modis, nempe secundo & tertio: non autem juxta modum primum, quia ratio non est minor quam ratio ZK ad KE. At si ratio data æqualis fuerit rationi ZK ad KE, componetur unico tantum modo, eoque tertio: non enim fieri potest secundum modum primum, quia ratio non est minor ratione ZK ad KE; neque modo secundo, quia non est major ea.

SCHOLION.

Generaliter autem construuntur problemata hujus Loci hunc in modum. Sint rectæ datæ AB, ΓΔ *sese interjecantes in puncto* E: *Ratio autem proposita sit ratio* M *ad* N. *Fiat* EΘ *æqualis termino rationis* M, *ac* EH, EK, *ab utraque parte puncti* E, *æquales ipsi* N *termino alteri rationis: ac ducantur*



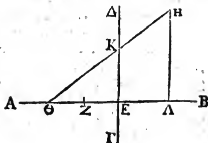
rectæ ΘH, ΘK. *Dico rectas omnes ipsis* ΘH, ΘK *parallelas auferre rationes rationi datæ* M *ad* N *æquales. Quapropter dato quovis puncto* Z, *ipsi* ΘH *parallela ducatur* ΛZΞ; *atque ipsi* ΘK *parallela* ZOΠ. *Dico* EΛ *esse ad* EΞ *ut* EΘ *ad* EH *(ob parallelas) hoc est ut* M *ad* N *(per constructionem.) Pariter* EO *est ad* EΠ *ut* EΘ *ad* EK, *sive ut* M *ad* N. *Rectæ igitur*

igitur ΛΞ, ΖΠ *satisfaciunt problemati, eæque solæ. Quod si altera è parallelis transeat per punctum* Ε; *altera tantum unico modo rem præstat.*

LOCUS QUARTUS.

Interſecent jam ſe mutuo rectæ ΑΒ, ΓΔ, in puncto Ε: ac ſumatur in recta ΑΒ punctum Ζ; in recta vero ΓΔ, punctum Ε. Eritque punctum datum vel intra angulum ΔΕΒ, vel intra angulum ΑΕΔ, vel intra angulos iiſdem deinceps. Cadat autem imprimis intra angulum ΔΕΒ, ut eſt punctum Η; ac educendæ ſint rectæ è puncto Η, quæ auferant à rectis, quæ punctis Ε, Ζ adjacent, ſegmenta in ratione data. Hoc autem fieri poteſt ſecundum quatuor diverſos caſus: aut enim erunt ſegmenta è rectis ΕΔ, ΖΑ; vel ex ΕΔ, ΖΕ; vel ex ΕΓ, ΖΒ; vel denique ex ΕΔ, ΖΒ.

Caſ. I. Ducatur jam ſecundum caſum primum, recta ΗΘ auferens à rectis ΕΔ, ΖΑ, rationem ΕΚ ad ΖΘ, æqualem rationi datæ. Agatur recta ΗΛ ipſi ΔΕ parallela, adeoque punctum Λ datur: ac fiat ut ΕΚ ad ΖΘ ita ΛΗ ad ΖΑ. Dato autem puncto Ζ; punctum quoque Α datur: ac ob datum punctum Λ, etiam recta ΑΛ datur. Jam ΛΗ eſt ad ΖΑ ſicut ΕΚ ad ΖΘ; adeoque permutando ΛΗ erit ad ΕΚ ut ΑΖ ad ΖΘ. Sed ΛΗ eſt ad ΕΚ ut ΛΘ ad ΘΕ; quapropter ΛΘ eſt ad ΘΕ ut ΑΖ ad ΖΘ, ac per converſionem rationis, erit ΘΛ ad ΛΕ ut ΖΑ ad ΑΘ; adeoque id quod fit ſub ΛΕ in ΖΑ æquale erit contento ſub ΛΘ in ΘΑ; quare rectangulum ΘΑ in ΘΛ datur. Applicandum eſt itaque ad rectam datam, nempe ad ipſam ΑΛ, rectangulum æquale rectangulo dato deficiens quadrato, ac habebitur utraque ΑΘ, ΘΛ data: adeoque punctum Θ datur. Dato autem puncto Η, ipſa ΗΘ datur poſitione.



Manifeſtum autem eſt quod applicatio hæc ſemper fieri poteſt; quia in compoſitione applicandum eſt ad rectam ΑΛ rectangulum æquale rectangulo ΛΕ in ΖΑ deficiens quadrato.

drato. Rectangulum enim Λ Z in Z Λ majus eſt rectangulo Λ E in Z Λ.

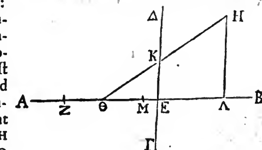
Componetur autem Problema hunc in modum. Manentibus jam deſcriptis, rectâque parallelâ H Λ; ſit ratio data ſicut M ad N; ac fiat Λ H ad Z Λ ſicut M ad N: & applicetur rectæ A Λ, rectangulum æquale rectangulo Λ Z in E Λ deficiens quadrato. Sit rectangulum illud Λ Θ in Θ Λ; ac jungatur Θ H. Dico quod recta Θ H, eaque ſola, ſolvit problema; ſive quod K E eſt ad Z Θ ſicut M ad N. Rectangulum enim Λ Θ in Θ Λ æquale eſt rectangulo Λ Z in E Λ; erit itaque Θ Λ ad Λ E ut Λ Z ad Θ Λ; ac per converſionem rationis erit Θ Λ ad Θ E ut Λ Z ad Z Θ. Sed Λ Θ eſt ad Θ E ut Λ H eſt ad E K; quare Λ H eſt ad E K ſicut Λ Z ad Z Θ; ac permutando Λ H erit ad Z Λ ut E K ad Z Θ. At Λ H eſt ad Z Λ ſicut M ad N; quare E K eſt ad Z Θ ſicut M ad N; quapropter recta Θ H ſolvit problema. Dico etiam & hanc ſolam hoc præſtare. Nam ſi fieri poteſt, ducatur alia, ut recta H Ξ. Quoniam autem rectangulum Λ Z in Z Λ majus eſt rectangulo Λ Θ in Θ Λ, erit rectangulum Λ Θ in Θ Λ majus rectangulo Λ Ξ in Ξ Λ; rectangulum vero Λ Θ in Θ Λ æquale eſt rectangulo Λ E *in* Z Λ; *igitur rectangulum* Λ E *in* Z Λ *majus eſt rectangulo* Λ Ξ in Ξ Λ: quare ratio Ξ Λ ad Λ E minor erit ratione Z Λ ad Λ Ξ; adeoque per converſionem rationis ratio Λ Ξ ad E Ξ major eſt ratione Λ Z ad Z Ξ. Sed ratio Λ Ξ ad Ξ E eſt ut Λ H ad E Σ; quare ratio Λ H ad E Σ major eſt ratione Λ Z ad Z Ξ; ac permutando ratio Λ H ad Z Λ major erit ratione E Σ ad Z Ξ. Atqui ratio Λ H ad Z Λ eſt ut M ad N; adeoque ratio M ad N major eſt ratione E Σ ad Z Ξ, quapropter recta H Ξ non ſolvit problema.

Manifeſtum autem eſt rectas puncto E propiores, auferre rationes majores quam quæ ſecantur à rectis remotioribus ab eodem.

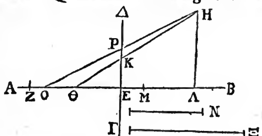
Caſ. II. Ducatur jam recta juxta caſum ſecundum, ut Θ H,

2 auferens

auferens à rectis ΕΔ, ΖΒ segmenta ΖΘ, ΕΚ in ratione rationi datæ æquali. Ipsi ΔΕ parallela ducatur recta ΗΛ per punctum datum Η; & fiat ut ΕΚ ad ΖΘ, ita ΗΛ ad ΖΜ. Datur autem recta ΗΛ, adeoque recta ΖΜ datur & magnitudine & positione: ac ob datum punctum Ζ, etiam punctum Μ datur. Quoniam vero ΛΗ est ad ΖΜ ut ΕΚ ad ΖΘ; erit permutando ΛΗ ad ΕΚ sicut ΖΜ ad ΖΘ. Sed ΛΗ est ad ΕΚ sicut ΛΘ ad ΘΕ; adeoque ΖΜ ad ΖΘ est ut ΛΘ ad ΘΕ: ac per conversionem rationis erit ΜΖ ad ΘΜ ut ΘΛ ad ΛΕ: quare rectangulum ΖΜ in ΕΛ æquale est rectangulo ΛΘ in ΘΜ. Sed rectangulum ΖΜ in ΕΛ datur, adeoque rectangulum ΛΘ in ΘΜ datum est, ad rectam datam, nempe ΜΛ, applicandum excedens quadrato. Punctum igitur Θ datur; ac dato puncto Η, recta ΗΘ positione datur.



Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, sit ratio data ut Ν ad Ξ; ac fiat ΗΛ ad ΖΜ ut Ν ad Ξ: dein applicetur ad rectam ΜΛ rectangulum æquale rectangulo ΖΜ in ΕΛ excedens quadrato, nempe rectangulum ΛΘ in ΘΜ. Quoniam autem rectangulum ΛΕ in ΖΜ excedens quadrato applicandum est ad rectam ΜΛ; ac rectangulum ΛΖ in ΖΜ majus est rectangulo ΛΕ in ΖΜ, cui æquale est rectangulum ΛΘ in ΘΜ; facta applicatione punctum Θ cadet inter puncta Ε, Ζ. Actâque rectâ ΘΗ, dico quod ipsa ΘΗ solvit problema, eaque sola. Nam si fieri potest ducatur alia, puta ΗΡΟ. Cum autem recta ΡΕ major est quam ΚΕ, ac recta ΖΟ minor est quam ΖΘ; ratio ipsius ΡΕ ad ΖΟ major erit ratione ΕΚ ad ΖΘ: adeoque sola recta ΗΘ solvit problema.



 Mani-

Manifeſtum autem eſt rectas propiores puncto E abſcindere rationes minores, quam quæ ſecantur à remotioribus ab eo.

Caſ. III. Ducatur jam recta ſecundum caſum tertium, ut ΛH auferens à rectis EΓ, ZB rationem ΛE ad ΘZ æqualem rationi datæ. Agatur per punctum H recta HK ipſi ΓΔ parallela; ac patet quod recta HK datur magnitudine, quodque punctum K datur. Fiat jam KH ad ZM ut ΛE ad ΘZ. Data autem eſt ratio ΛE ad ΘZ; quare & ratio KH ad ZM datur, ac recta ZM datur magnitudine & poſitione: ac ob datum punctum Z punctum M datur; cumque punctum K datur, datur etiam recta KM. Quoniam autem KH eſt ad ZM ut ΛE ad ZΘ, permutando erit KH ad ΛE ſicut ZM ad ZΘ. Sed KH eſt ad ΛE ut KΘ ad ΘE; quare KΘ eſt ad ΘE ut MZ ad ZΘ: adeoque componendo erit KE ad EΘ ut MΘ ad ΘZ. Per converſionem autem rationis erit EK ad KΘ ut ΘM ad MZ. Rectangulum itaque EK in MZ æquale eſt rectangulo MΘ in ΘK. Datur autem rectangulum KE in MZ, ob data latera ejus; quare datum eſt etiam rectangulum MΘ in ΘK, applicandum ad rectam datam MK deficiens quadrato: ac habebitur punctum Θ, quod quidem cadet inter puncta E & K; quia rectangulum ME in EK majus eſt rectangulo MZ in EK, ſive MΘ in ΘK. Dato autem puncto H, etiam recta HΘΛ datur poſitione.

Conſtruetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam deſcriptis, ductâque rectâ parallelâ; ſit ratio propoſita ſicut N ad Ξ. Fiat KH ad ZM ſicut N ad Ξ & applicetur ad rectam KM rectangulum æquale rectangulo EK in ZM deficiens quadrato. Sit rectangulum illud MΘ in ΘK; ac jungatur recta HΘ, quæ producatur ad Λ. Dico quod recta HΛ ſolvit problema, auferens rationem ΛE ad ZΘ ſicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum KE in ZM æquale eſt rectangulo MΘ in ΘK, erit EK ad KΘ ſicut ΘM ad MZ; ac per converſionem rationis erit KE ad EΘ ut MΘ ad ΘZ: quare dividendo erit KΘ ad EΘ,

ſive KH ad ΛE, ſicut MZ ad ZΘ: ac permutando KH ad MZ erit ut ΛE ad ZΘ. Sed KH eſt ad MZ ſicut N ad Ξ (per conſtructionem) quare ΛE erit ad ZΘ ſicut N ad Ξ; adeoque recta HΛ ſatisfacit problemati. Dico etiam quod ea ſola hoc præſtat. Nam ſi fieri poteſt, ducatur alia ut OH; ac ſi ſecet recta HO rationem propoſitam, ſive æqualem rationi N à Ξ, erit ΛE ad ZΘ ſicut OE ad ZP. At ΛE eſt ad ZΘ ſicut KH ad ZM, adeoque KH erit ad ZM ut OE ad ZP: ac permutando erit KH ad OE ut ZM ad PZ. Eſt autem KH ad OE ſicut KP ad PE; quare KP erit ad PE ut MZ ad ZP. Componendo itaque ac convertendo rationem, EK erit ad KP ſicut MP ad MZ: unde rectangulum EK in MZ æquale erit rectangulo KP in MP. Sed rectangulum MΘ in ΘK æquale eſt rectangulo EK in MZ, adeoque rectangulum MΘ in ΘK æquale erit rectangulo MP in PK; quod fieri nequit: adeoque ſola recta HΛ ſolvit problema.

Poſito *autem quod rectangulum* MΘ *in* ΘK *ſive rectangulum* EK *in* MZ minus fuerit rectangulo MP, in PK; patet quod ratio EK ad PK minor erit ratione MP ad MZ: ac per converſionem rationis erit ratio KE ad EP major ratione MP ad PZ; dividendo autem erit ratio KP ad PE major ratione MZ ad ZP. Sed KP eſt ad PE ſicut KH ad OE; quare ratio KH ad OE major eſt ratione MZ ad ZP: & permutando ratio KH ad MZ major erit ratione OE ad ZP. Quoniam autem HK eſt ad MZ ut ΛE ad ZΘ, igitur ratio ΛE ad ZΘ major erit ratione OE ad ZP; adeoque recta ΛH majorem aufert rationem quam quæ abſcinditur à recta OH: unde manifeſtum eſt rectas propiores puncto E auferre rationes minores quam quæ ſecantur à remotioribus ab eo.

Caſ. IV. Ducatur jam recta ſecundum modum quartum, ut KΘ, auferens à rectis EΔ, ZB, rationem æqualem rationi datæ, nempe rationem EΘ ad KZ. Ducatur rectæ ΓΔ parallela,

lela, ut HΛ; ac recta HΛ tam magnitudine quam positione data est; adeoque punctum Λ datur. Cum autem ratio EΘ ad KZ datur, ei fiat ratio HΛ ad ZM æqualis: ratione itaque ΛH ad ZM data, atque ipsa ΛH data, recta MZ etiam data est magnitudine & positione, ac ob cognitum punctum Z, punctum M etiam datur: dato autem puncto Λ, recta MΛ habetur. Verum cum EΘ est ad KZ ut ΛH ad ZM; permutando erit EΘ ad ΛH, sive EK ad KΛ, ut KZ ad ZM: ac dividendo erit EΛ ad ΛK sicut KM ad ZM. Rectangulum itaque EΛ in ZM æquale erit rectangulo MK in KΛ. Sed rectangulum EΛ in MZ datum est, adeoque & rectangulum MK in KΛ datur, applicandum ad rectam datam MΛ excedens quadrato, ut habeatur punctum K. Datis autem punctis K & H, recta etiam KHΘ positione datur.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, ductaque recta parallela, sit ratio data sicut N ad Ξ. Fiat HΛ ad ZM sicut N ad Ξ, & applicetur ad rectam MΛ rectangulum æquale rectangulo ΛE in MZ excedens quadrato, nempe rectangulum MK in KΛ. Jungatur KH ac producatur ad Θ. Dico quod recta ΘK solvit problema, sive quod aufert rationem EΘ ad ZK æqualem rationi N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum ΛE in ZM æquale est rectangulo MK in KΛ, erit EΛ ad ΛK sicut KM ad MZ; & componendo erit EK ad KΛ ut KZ ad MZ. Sed EK est ad KΛ ut EΘ ad ΛH; adeoque EΘ est ad ΛH sicut KZ ad MZ: ac permutando erit EΘ ad KZ sicut ΛH ad MZ. Atqui ΛH est ad MZ sicut N ad Ξ, adeoque EΘ est ad KZ ut N ad Ξ; quare recta KΘ solvit problema. Dico etiam quod & sola hoc præstat. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut recta OΠ; ac si secet ipsa OΠ rationem æqualem rationi N ad Ξ, erit EO ad ZΠ sicut EΘ ad ZK. Est autem EΘ ad ZK ut ΛH ad ZM, adeoque erit EO ad ZΠ sicut ΛH ad

ZM;

ZM; & permutando erit EO ad ΛH ut ZΠ ad ZM. Sed EO eſt ad ΛH ut EΠ ad ΠΛ, adeoque EΠ eſt ad ΠΛ ſicut ΠZ ad ZM: quare dividendo erit EΛ ad ΠΛ ut ΠM ad ZM, ac rectangulum EΛ in ZM æquale erit rectangulo ΠΛ in ΠM. Cum autem rectangulum EΛ in ZM æquale eſt rectangulo MK in KΛ, rectangulum MK in KΛ æquale erit rectangulo MΠ in ΠΛ; quod fieri nequit: adeoque ſola recta KΘ ſolvit problema.

Quænam autem ex illis auferat rationem majorem hunc ad modum cognoſcitur. Quoniam rectangulum MK in KΛ, ſive ΛE in MZ, majus eſt rectangulo MΠ in ΠΛ; erit ratio EΛ ad ΛΠ major ratione ΠM ad MZ; ac componendo ratio EΠ ad ΠΛ major quam ratio ΠZ ad ZM. Sed ratio EΠ ad ΠΛ eſt ut EO ad ΛH; quare ratio EO ad ΛH major erit ratione ΠZ ad ZM: ac permutando erit ratio EO ad ΠZ major quam ΛH ad ZM. Ratio autem ΛH ad ZM eſt ut EΘ ad KZ, adeoque ratio EO ad ΠZ major erit ratione EΘ ad KZ: quare recta KΘ aufert rationem minorem quam quæ ſecatur à recta OΠ.

Hinc manifeſtum eſt rectas puncto E propiores abſcindere rationes minores, quam quæ ſecantur à rectis remotioribus ab eo.

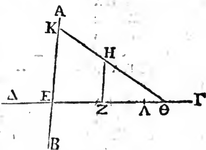
Poſſibile autem eſt problema hoc quomodocunque propoſitum, & componi poteſt juxta omnes caſus prædictos, ſed uno tantum modo: nam in omnibus non habentur limites.

LOCUS QUINTUS.

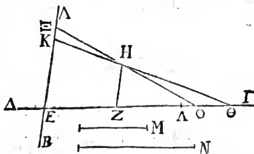
Sit punctum datum H intra angulum ΓEΛ; ac ductâ per punctum H rectâ ipſi AB parallelâ, ſumi poteſt punctum Z *in recta* ΓE, vel ultra, vel citra, vel ſuper ipſam rectam parallelam. Cadat autem imprimis ſuper ipſam parallelam; ac duci

duci possunt rectæ è puncto H tribus modis diversis: vel enim ducta auferet rationem à rectis Γ Z, E A; vel à rectis E Z, E B; vel denique à rectis E A, Z Δ.

Cas. I. Primo autem ducatur, juxta modum primum, secans à rectis Γ Z, E A rationem E K ad Z Θ æqualem rationi datæ. Fiat Z H ad Z Λ sicut E K ad Z Θ. Cumque ratio H Z ad Z Λ datur, atque ipsa Z H datur, etiam recta Z Λ datur: ac dato puncto Z punctum Λ datur; adeoque recta Z Λ datur magnitudine & positione. Quoniam vero E K est ad Z Θ sicut H Z ad Z Λ, erit permutando E K ad Z H ut Z Θ ad Z Λ. Sed E K est ad Z H ut E Θ ad Θ Z, adeoque E Θ est ad Θ Z ut Θ Z ad Z Λ; quare dividendo erit E Z ad Θ Z sicut Θ Λ ad Z Λ: rectangulum itaque E Z in Z Λ æquale est rectangulo Θ Z in Θ Λ. At rectangulum E Z in Z Λ datur; ergo rectangulum Z Θ in Θ Λ etiam datur, applicandum ad rectam datam Λ Z excedens quadrato: unde punctum Θ innotescet. Dato autem puncto H, recta quoque Θ K datur positione.



Componetur autem hoc problema. Manentibus prius descriptis, ductaque recta parallela; sit ratio data sicut M ad N. Fiat H Z ad Z Λ sicut M ad N; & applicetur ad rectam Z Λ rectangulum æquale rectangulo E Z in Z Λ excedens quadrato, ut rectangulum Z Θ in Θ Λ. Jungatur H Θ ac producatur ad K. Dico rectam Θ K solvere problema, sive quod E K est ad Z Θ in ratione M ad N. Quoniam enim rectangulum E Z in Z Λ æquale est rectangulo Z Θ in Θ Λ, erit E Z ad Z Θ sicut Θ Λ ad Λ Z; & componendo erit E Θ ad Θ Z *sicut* Θ Z *ad* Λ Z. *Sed* E Θ *est ad* Θ Z ut E K ad Z H, adeoque E K est ad Z H sicut

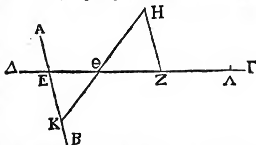


Θ Z

ΘΖ ad ΖΛ: quare permutando erit ΕΚ ad ΘΖ ſicut ΖΗ ad ΖΛ. Eſt autem ΗΖ ad ΖΛ (per conſtructionem) ſicut Μ ad Ν; quare ΕΚ eſt ad ΖΘ ut Μ ad Ν, ac recta ΘΚ ſolvit problema. Dico & hanc ſolam id præſtare. Nam ſi poſſibile ſit, ducatur alia ut ΞΟ: quæ ſi auferat rationem æqualem rationi Μ ad Ν, erit ΕΚ ad ΖΘ ſicut ΕΞ ad ΖΟ. Cumque ΕΚ eſt ad ΖΘ ut ΗΖ ad ΖΛ, erit ΖΗ ad ΖΛ ut ΕΞ ad ΖΟ: ac permutando erit ΕΞ ad ΖΗ ut ΖΟ ad ΖΛ. At ΕΞ eſt ad ΖΗ ſicut ΕΟ ad ΖΟ, adeoque ΕΟ eſt ad ΖΟ ut ΟΖ ad ΖΛ: unde dividendo erit ΕΖ *ad* ΖΟ *ſicut* ΟΛ *ad* ΖΛ; *adeoque rectangulum* ΕΖ in ΖΛ æquale erit rectangulo ΖΟ in ΟΛ. Sed rectangulum ΕΖ in ΖΛ æquale eſt rectangulo ΖΘ in ΘΛ; quare rectangulum ΖΘ in ΘΛ æquale erit rectangulo ΖΟ in ΟΛ, quod fieri non poteſt: adeoque ſola recta ΘΚ ſolvit problema. Quoniam autem recta ΕΞ major eſt quam recta ΕΚ, ΘΖ vero major eſt quam recta ΖΟ; erit ratio ΕΞ ad ΖΟ major ratione ΕΚ ad ΖΘ; adeoque recta ΘΚ aufert rationem minorem, quam quæ abſcinditur ab ipſa ΟΞ.

Manifeſtum itaque eſt rectas propiores puncto Ε auferre rationes minores, quam quæ ſecantur à remotioribus ab eo.

Caſ. II. Ducatur jam, juxta modum ſecundum, recta ΗΚ, auferens à rectis ΕΖ, ΕΒ rationem ΚΕ ad ΘΖ, æqualem rationi datæ. Rationi datæ ΚΕ ad ΖΘ æqualis ſit ratio ΗΖ ad ΖΛ; data autem ratione ΗΖ ad ΖΛ, atque ipſâ ΗΖ, data eſt etiam recta ΖΛ; cumque punctum Ζ datur, punctum Λ quoque datum eſt, ac recta ΖΛ datur magnitudine & poſitione. Quoniam autem ΚΕ eſt ad ΖΘ ut ΗΖ ad ΖΛ, erit permutando ΚΕ ad ΖΗ, ſive ΕΘ ad ΘΖ, ut ΖΘ ad ΖΛ; ac componendo erit ΕΖ ad ΘΖ, ut ΘΛ ad ΛΖ: adeoque rectangulum ΕΖ in ΛΖ æquale rectangulo ΛΘ in ΘΖ. Applicando igitur hoc ad rectam datam ΖΛ excedens quadrato, habebitur punctum Θ, quod ſemper cadet inter puncta Ε, Ζ; dato autem puncto Η, etiam recta ΗΘΚ poſitione datur.

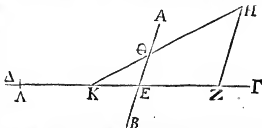


Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus deſcriptis,

descriptis, rectaque parallela; sit ratio data sicut M ad N, cui æqualis sit ratio HZ ad ZΛ; & applicetur ad ΛZ rectangulum æquale rectangulo EZ in ΛZ excedens quadrato. Sitque rectangulum illud ΛΘ in ΘZ; ac jungatur recta ΘH, quæ producatur ad K. Dico rectam HK solvere problema, sive quod KE est ad ZΘ sicut M ad N. Quoniam enim rectangulum EZ in ZΛ æquale est rectangulo ΛΘ in ΘZ, erit resolvendo in proportionem, EZ ad ZΘ ut ΘΛ ad ΛZ; ac dividendo erit EΘ ad ΘZ ut ΘZ ad ZΛ. Sed KE est ad ZH ut EΘ ad ΘZ, adeoque KE est ad ZH ut ΘZ ad ZΛ, ac permutando KE ad ΘZ ut ZH ad ZΛ. Est autem ZH ad ZΛ sicut M ad N, quare KE est ad ZΘ sicut M ad N: quapropter recta HK satisfacit problemati. Dico etiam quod ea sola hoc præstat: nam si aliter possibile sit, ducatur alia recta ut HO; ac si secet recta HO rationem æqualem rationi M ad N, erit KE ad ZΘ sicut EO ad ZΞ. Cumque EK est ad ZΘ, sicut HZ ad ZΛ, etiam erit OE ad ZΞ sicut HZ ad ZΛ; ac permutando erit OE ad ZH ut ZΞ ad ZΛ. Sed OE est ad ZH ut EΞ ad ZΞ, adeoque EΞ erit ad ΞZ ut ΞZ ad ZΛ; ac componendo EZ erit ad ΞZ ut ΞΛ ad ZΛ: quare rectangulum EZ in ZΛ æquale erit rectangulo ΞZ in ΞΛ. Hoc autem fieri nequit, quia fecimus rectangulum ΛΘ in ΘZ æquale rectangulo EZ in ZΛ; quapropter sola recta HK solvit problema. Quoniam autem EO major est quam EK, recta vero ZΞ minor quam ZΘ; manifestum est rectam HK abscindere rationem minorem quam recta OH.

Cas. III. Ducatur jam secundum modum tertium recta KH, auferens a rectis EΛ, ZΔ rationem EΘ ad ZK æqualem rationi datæ. Quoniam ratio EΘ ad ZK data est, eidem æqualis sit ratio HZ ad ZΛ: datâ autem rectâ ZH etiam recta ZΛ datur: cumque punctum Z datur, punctum quoque Λ datum erit, ac recta ZΛ datur tam magnitudine quam positione. Jam vero EΘ est ad ZK sicut HZ ad ZΛ, ac permutando EΘ erit

erit ad HZ sicut KZ ad ZΛ. Sed EΘ est ad ZH ut EK ad KZ, adeoque EK est ad KZ ut KZ ad ZΛ; quare invertendo ac convertendo rationem, erit KZ ad ZE sicut ZΛ ad ΛK: quocirca rectangulum ΛZ in ZE æquale est rectangulo KZ in ΛK. At vero rectangulum ΛZ in ZE datur, ob data ejusdem latera; adeoque rectangulum ZK in ΛK etiam datur. Dein applicando ad rectam datam ZΛ rectangulum prædictum deficiens quadrato, habebitur punctum K: dato autem puncto H, recta HK etiam positione datur.



Quoniam autem requiritur ad compositionem, ut fiat ratio HZ ad ZΛ æqualis rationi datæ, atque ut applicetur ad rectam ZΛ rectangulum æquale rectangulo ΛZ in ZE deficiens quadrato, nempe rectangulum ZK in KΛ; *cadet punctum* K *in recta* EΛ, eritq; recta quæsita HK, quæ ducta solvet problema. At non semper possibile est talem rectam ducere, quoties scilicet rectangulum ΛZ in ZE majus fuerit quadrato ex dimidio ipsius ΛZ: quapropter applicatio fieri nequit: adeoque constructio problematis non semper possibilis est, neque in omni casu. Fit autem modo singulari, si recta quæsita occurrat rectæ ZΛ in ipsius medio ad punctum K, ac sit rectangulum ΛZ in ZE æquale rectangulo ZK in KΛ, ut sic satisfaciat problemati.

Determinatur autem ratio hæc, capiendo rationem datæ HZ ad quæsitam ZΛ talem, ut si dividatur recta ZΛ bifariam in K, rectangulum ΛZ in ZE æquale sit rectangulo ZK in KΛ. Hoc autem efficitur, si inveniatur in recta EZ punctum quoddam ut Λ, ita ut divisâ ZΛ bifariam in K, rectangulum ΛZ in ZE æquale sit rectangulo KZ in KΛ. Puta factum. Cumque rectangulum ΛZ in ZE æquale est rectangulo KZ in KΛ, erit ZΛ ad ΛK sicut KZ ad ZE. Recta autem ZΛ duplum est ipsius ΛK, adeoque KZ etiam duplum erit ipsius ZE, ac recta ZE æqualis erit ipsi EK. At recta ZE datur, adeoque & EK datur magnitudine & positione. Datis autem punctis E, K & Z, datur quoque recta ZK cui æqualis est KΛ; adeoque recta KΛ

datur magnitudine & positione: ac dato puncto K, punctum Λ etiam datur: punctum igitur quæsitum, in quo habetur terminus rationum, est punctum Λ. Dico præterea, quod si jungatur recta HK, erit ΘE ad ZK sicut HZ ad ZΛ; etenim recta KE *dimidium est ipsius* ZK, *uti* ZK *dimidium ipsius* ΛZ: adeoque erit ΛZ ad ZK ut ZK ad KE, hoc est, ut HZ ad EΘ; ac permutando erit HZ ad ZΛ ut ΘE ad ZK. Componetur autem ratio ista extrema, si fiat recta EK ipsi ZE æqualis, ac jungatur HK.

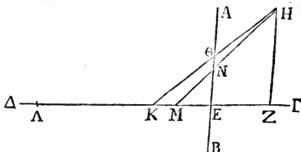
Imprimis autem inquirendum est, an hæc recta HK auferat rationem majorem vel minorem quavis alia, per punctum H ducenda, rectisque EA, ZΔ occurrente: quod quidem hunc in modum determinatur.

Manentibus jam descriptis, rectâque parallelâ; fiat recta EK æqualis ipsi EZ. Junctâ rectâ HK, examinandum est an recta HK auferat rationem EΘ ad ZK, majorem quam alia quævis recta per punctum H ducta, rectisque EA, ZΔ occurrens. Fiat recta KΛ æqualis ipsi KZ, ac rectangulum ΛZ in ZE æquale erit rectangulo ZK in KΛ; & ratio EΘ ad ZK erit ut HZ ad ZΛ sive ut HZ ad quater ZE. Agatur recta alia ut HM; ac comparanda venit ratio EΘ ad ZK cum ratione NE ad ZM. Cumque EΘ est ad ZK ut ZH ad ZΛ, conferenda est ratio HZ ad ZΛ cum ratione NE ad ZM; ac permutando, conferenda est ratio HZ ad NE cum ratione ΛZ ad ZM. At ZH est ad EN ut ZM ad ME; quare comparanda est ratio ZM ad ME cum ratione ΛZ ad MZ. Ac convertendo rationem, conferenda est ratio MZ ad ZE cum ratione ΛZ ad ΛM: unde conferendum est rectangulum ΛZ in ZE cum rectangulo MZ in MΛ. Quoniam autem rectangulum ZK in KΛ æquale est rectangulo ΛZ in ZE, conferatur rectangulum ZK in KΛ cum rectangulo ZM in MΛ. Manifestum autem est quod rectangulum ZK in KΛ majus est rect-

ſ angulo

angulo ZM in MΛ, quia K est in medio ipsius ZΛ: rectangulum itaque ZM in MΛ minus est rectangulo KZ in KΛ. Cumque rectangulum ΛZ in ZE æquale est rectangulo KZ in KΛ, igitur rectangulum ZM in MΛ minus erit rectangulo ΛZ in ZE; adeoque ratio ZM ad ZE minor erit ratione ZΛ ad ΛM: ac convertendo rationem, ZM ad ME major erit ratione ZΛ ad ZM.

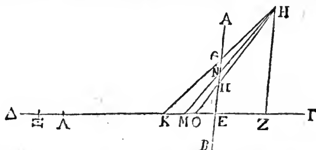
Sed ZM est ad ME ut ZH ad EN; quare ratio ZH ad EN major est ratione ΛZ ad ZM: & permutando erit ratio ZH ad ΛZ major ratione EN ad ZM. Est autem ZH ad ZΛ ut EΘ ad ZK, ergo ratio EΘ ad ZK major est ratione EN ad ZM; quare recta HK aufert rationem majorem quam quæ secatur à recta HM: unde patet rationem EΘ ad ZK majorem esse rationibus quibuscunque, quæ abscindi possint à rectis quibusvis per punctum H ductis, rectisque EA, ZΔ occurrentibus.



Dico etiam quod rectæ propiores ipsi HK auferunt semper rationes majores, quam quæ secantur à remotioribus ab ea. Quoniam enim ratio NE ad ZM minor est ratione EΘ ad ZK, ac EΘ est ad ZK ut ZH ad ZΛ: erit ratio NE ad ZM minor ratione ZH ad ZΛ. Fiat itaque ut NE ad ZM ita ZH ad rectam aliam, majorem quam ZΛ, puta ad ZΞ: adeoque erit NE ad ZM ut ZH ad ZΞ. Sed & juxta resolutionem præmissam, constat rectangulum ZΞ in ZE æquale esse rectangulo ZM in MΞ, ob rationem NE ad ZM æqualem rationi HZ ad ZΞ. Ducatur jam recta alia ut OH, ac comparanda ut ratio NE ad ZM cum ratione ΠE ad ZO. Est autem NE ad ZM ut HZ ad ZΞ; quare permutando, comparanda est ratio ZH ad EΠ cum ratione ΞZ ad ZO. Sed ratio ZH ad EΠ est ut ZO ad OE, *adeoque comparanda est ratio* ZO *ad* OE cum ratione ΞZ ad ZO; ac per conversionem rationis, comparanda est ratio ZO ad ZE cum ratione ΞZ ad ΞO: & conferendum rectangulum ΞZ in ZE cum rectangulo ZO in ΞO.

Sed

Sed rectangulum ΞZ in ZE æquale est rectangulo ZM in MΞ; quapropter conferendum est rectangulum ZM in MΞ cum rectangulo ZO in OΞ. Conferatur etiam rectangulum ZK in KΞ cum rectangulo ZM in MΞ. Est autem rectangulum ΞZ in ZE æquale rectangulo ZM in MΞ; comparandum est itaque rectangulum ZK in KΞ cum rectangulo ΞZ in ZE. Demonstratum autem est rectangulum ZK in KΛ æquari rectangulo ΛZ in EZ; *quare auferendo rectangulum* ZK *in* KΛ *è rectangulo* ZK *in* KΞ, *ac rectangulum* ΛZ *in* ZE *è rectangulo* ΞZ *in* ZE, *residua erunt rectangula* ZK *in* ΛΞ *&* EZ *in* ΞΛ. Conferatur ergo rectangulum ΛΞ in ZK cum rectangulo ΞΛ in EZ. Sed manifestum est rectangulum ΞΛ in ZK ma-



jus esse rectangulo ΞΛ in EZ; *quibus additis ad æqualia* rectangula ZK *in* KΛ & ΛZ in EZ, fiet rectangulum ZK in KΞ majus rectangulo ΞZ in ZE. Sed ZM in MΞ æquale est rectangulo ΞZ in ZE, adeoque ZK in KΞ majus est rectangulo ZM in MΞ: dato itaque quovis puncto O, rectangulum ZM in MΞ majus erit rectangulo ZO in OΞ. At rectangulum ΞZ in ZE æquale est rectangulo ZM in MΞ; *adeoque rectangulum* ΞZ *in* ZE *majus erit rectangulo* ZO *in* OΞ: unde ratio OZ ad ZE minor erit ratione ΞZ ad ΞO. Ac convertendo rationem, ratio OZ *ad* OE major erit ratione ΞZ ad ZO. Ratio autem OZ ad OE est ut ZH ad EΠ; quare ratio HZ ad EΠ major erit ratione ΞZ ad ZO: ac permutando, ratio HZ ad ΞZ *major erit ratione* EΠ *ad* ZO. *Sed* HZ *est ad* ΞZ ut NE ad ZM; quare ratio NE ad ZM major erit ratione ΠE ad ZO: quocirca recta HM aufert rationem majorem quam quæ secatur à recta HO. Hinc manifestum est rectas propiores ipsi HK abscindere rationes majores, quam quæ secantur à remotioribus ab ea. Patet etiam ex jam descriptis rationem maximam

mam ΕΘ ad ΖΚ æqualem esse rationi ΖΗ ad quater ΖΕ, quia ΖΛ est quater ΖΕ.

Componetur autem problema hunc in modum. Iisdem manentibus quæ supra, ac ductâ rectâ parallelâ; fiat recta ΕΚ æqualis ipsi ΖΕ, ac jungatur ΗΚ. Hæc recta ΗΚ auferet rationem majorem, quam quævis alia recta per punctum Η ducta, ipsisque ΕΑ, ΖΔ occurrens. Ratio autem proposita vel erit æqualis rationi ΕΘ ad ΖΚ, hoc est, rationi ΗΖ ad quater ΖΕ, (juxta jam demonstrata) vel major erit ratione ΕΘ ad ΖΚ, vel minor erit ea. Si autem ratio data æqualis fuerit rationi ΕΘ ad ΖΚ, recta ΗΚ solvit problema, eaque sola: quia rectæ huic propiores semper auferunt rationes majores, quam quæ sunt remotiores ab ea. At si major fuerit ratio quam ΕΘ ad ΖΚ, impossibile erit problema; quia ratio proposita major est maximâ. Quod si ratio Μ ad Ν minor fuerit quam ratio ΕΘ ad ΖΚ; fiat recta ΖΚ æqualis ipsi ΚΛ: eritque rectangulum ΛΖ in ΖΕ æquale rectangulo ΖΚ in ΚΛ, ac ratio ΕΘ ad ΖΚ æqualis rationi ΗΖ ad ΖΛ. Quoniam autem ratio Μ ad Ν minor est quam ratio ΗΖ ad ΖΛ, faciamus ut Μ ad Ν ita ΗΖ ad rectam aliam ipsâ ΖΛ longiorem, puta ad ΖΞ. Est vero recta ΚΖ major quam ipsa ΖΕ; quare rectangulum ΞΛ in ΚΖ majus erit rectangulo ΞΛ in ΕΖ. Rectangulum autem ΛΖ in ΖΕ æquale est rectangulo ΖΚ in ΚΛ; adeoque si applicetur ad rectangulum ΖΚ in ΚΛ rectangulum ΖΚ in ΞΛ, ac ad rectangulum ΛΖ in ΕΖ rectangulum ΞΛ in ΕΖ, erit totum rectangulum ΖΚ in ΚΞ majus rectangulo toto ΞΖ in ΖΕ: quare possibile erit applicare ad rectam ΖΞ rectangulum æquale rectangulo ΞΖ ad ΖΕ, duobus modis, ab utraque scilicet parte puncti Κ; & habebuntur puncta in rectis quæsitis, nempe Ο & Ρ. Junctisque rectis ΗΟ, ΗΡ, dico

dico utramque ex illis problema ſolvere. Etenim rectangulum ΞZ in ZE æquale eſt rectangulo ZO in OΞ; quare OZ erit ad ZE ut ΞZ ad OΞ: ac convertendo rationem, OZ erit ad OE ut ΞZ ad OZ. Sed OZ eſt ad OE ſicut HZ ad EΠ; quare HZ eſt ad EΠ ut ΞZ ad ZO: ac permutando, HZ erit ad ZΞ ut EΠ ad ZO. Eſt vero HZ ad ZΞ, ut M ad N; adeoque M eſt ad N ut EΠ ad ZO: quapropter recta HO ſolvit problema. Ac pari argumento demonſtratur rectam HP idem præſtare; utraque itaque HO, HP ſatisfacit quæſito.

Invenimus itaque Reſolutionem problematis ſecundum omnes caſus ejus, ac Compoſitionem oſtendimus juxta omnes modos. Ductâ autem rectâ parallelâ, erit ratio data vel æqualis rationi ZH ad quater ZE, vel erit major eâ, vel minor. Quod ſi æqualis fuerit, componetur problema juxta caſum primum & ſecundum, ac modo ſingulari juxta caſum tertium. Si major fuerit, componi poteſt dupliciter; modo nempe primo, & ſecundo. At ſi minor fuerit ratio, tum quatuor modis fieri poteſt Conſtructio; nempe primo, & ſecundo, ac dupliciter juxta tertium.

LOCUS SEXTUS.

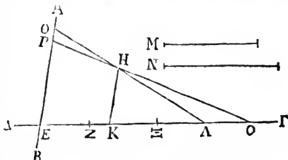
Cadat jam recta HK, per punctum H ducta ipſique AE parallela, ultra punctum Z; ſive ut ſit punctum Z inter illam & punctum E. Ac recta duci poteſt per punctum H, juxta quatuor caſus; vel enim auferet rationem à rectis ΓZ, EA; vel à ΓZ, EB; vel à rectis ZE, EB; vel denique à ZΔ, EA.

Caſ. I. Imprimis autem ducatur juxta caſum primum recta ΘΛ, auferens à rectis ΓZ, EA rationem EΘ ad ZΛ æqualem rationi datæ. Fiat autem ratio KH ad ZM æqualis rationi EΘ ad ΛZ; ac datâ rectâ HK, recta etiam ZM datur magnitudine & poſitione; cumque punctum Z datur, datum eſt quoque punctum M. Quoniam autem EΘ eſt ad ZΛ ſicut HK ad ZM; erit permutando, EΘ ad

HK

HK sicut ΛZ ad ZM. Sed ratio EΘ ad HK est ut ΛE ad ΛK, quare EΛ erit ad ΛK ut ΛZ ad ZM: ac dividendo, EK erit ad KΛ *ut* ΛM *ad* ZM, *adeoque rectangulum* EK *in* ZM æquale erit rectangulo KΛ in ΛM. Rectangulum autem MZ in EK datur, dato utroque ejus latere; itaque rectangulum KΛ in ΛM datur, applicandum ad rectam datam KM excedens quadrato; unde punctum Λ datur, ac recta ΛΘ positione data est.

Sic autem componetur problema hoc. Iisdem positis quæ supra, ductâque rectâ parallelâ; sit ratio data sicut M ad N, ac fiat HK ad ZΞ sicut M ad N; dein applicetur ad rectam KΞ rectangulum æquale rectangulo ΞZ in KE excedens quadrato, nempe rectangulum ΛK in ΛΞ; & jungatur recta ΛH quæ producatur ad Θ. Dico quod recta ΛΘ solvit problema, sive quod ratio EΘ ad ZΛ est ut M ad N. Quoniam enim rectangulum EK in ZΞ æquale est rectangulo KΛ in ΛΞ; erit EK ad KΛ sicut ΛΞ ad ΞZ: adeoque componendo, erit EΛ ad ΛK, sive EΘ ad



HK, sicut ΛZ ad ZΞ: ac permutando, erit EΘ ad ΛZ sicut HK ad ZΞ. At HK est ad ZΞ sicut M ad N, adeoque recta ΛΘ solvit problema. Dico etiam quod sola hoc præstat. Nam si possibile sit ducatur alia ut OP. At si recta OP auferat rationem æqualem rationi M ad N, erit ratio EP ad ZO æqualis rationi ΘE ad ZΛ. Quod fieri nequit, cum evidenter minor sit ratio illa. Ac patet rectas propiores puncto E, ut recta OP, auferre rationes minores quam quæ abscinduntur à remotioribus ab eo.

Cas. II. Manentibus quæ prius, ductâque rectâ parallelâ; ducatur jam juxta modum secundum recta HΛ, auferens ab ipsis ΓZ, EB rationem ΛE ad ZK æqualem rationi datæ. Fiat ΘH ad ZM sicut ΛE ad ZK. Cumque recta ΘH datur, recta ZM etiam datur & magnitudine & positione: ac dato puncto Z, punctum M datur; adeoque cum punctum Θ detur, recta quoque ΘM data est magnitudine & positione. Jam ΛE est ad

ad Z K ut Θ H ad Z M; quare permutando, Λ E erit ad Θ H ut eſt K Z ad Z M. Sed Λ E eſt ad Θ H ſicut E K ad K Θ; *quare* E K *eſt ad* K Θ *ſicut* K Z *ad* Z M; ac componendo, E Θ ad Θ K ſicut K M ad M Z: *rectangulum itaque* E Θ *in* M Z *æquale eſt rectangulo* Θ K *in* K M. Datum autem eſt rectangulum E Θ in M Z, dato nempe utroque ejus latere; adeoque rectangulum M K in K Θ datur: quare applicando illud ad rectam M Θ deficiens quadrato, punctum K datur. Dato autem puncto H, recta quoque H K Λ poſitione data erit.

Quoniam autem in Compoſitione oportet fieri rationem Θ H ad Z M æqualem rationi datæ, & applicari ad rectam Θ M rectangulum æquale rectangulo Θ E in Z M deficiens quadrato; cadet punctum K in recta Θ Z. At non ſemper poſſibile eſt rectam quæſitam ducere. Etenim ſi rectangulum Θ E in Z M majus fuerit quadrato dimidii ipſius Θ M, tum fieri non poteſt applicatio; adeoque non ſemper neque in omni caſu conſtrui poteſt problema.

Fit autem modo ſingulari, ſi ducatur recta tranſiens per punctum K, quod in medio ſit ipſius Θ M, ea lege ut rectangulum Θ K in K M æquale ſit rectangulo Θ E in Z M; quæ proinde ſatisfaciet problemati. Obtinebitur autem extrema illa ratio, ſi ponamus rationem Θ H ad Z M æqualem illi, ac ſectâ ipsâ Θ M bifariam in K rectangulum Θ K in K M æquale fuerit rectangulo E Θ in Z M. Inquirendum igitur eſt punctum M in recta Z Δ, tale, ut, ſi biſecetur Θ M in puncto K, habeatur rectangulum Θ E in Z M æquale rectangulo Θ K in K M. Erit igitur E Θ ad Θ K ſicut K M ad M Z; ac per converſionem rationis, Θ E ad E K erit ut M K ad K Z. Sed K M æqualis eſt ipſi K Θ, adeoque erit Θ E ad E K ſicut Θ K ad K Z; permutando autem erit E Θ ad Θ K ſicut E K ad K Z. Per converſionem vero rationis E Θ erit ad E K ſicut E K ad E Z: quare recta E K media proportionalis eſt inter E Θ & E Z. Utraque autem Θ E, E Z datur, adeoque ipſa E K datur magnitu-

magnitudine & positione; ac ob datum punctum E punctum K etiam datur. Cumque punctum Θ datur, ipsa ΘK data est; cui æqualis est recta KM: quapropter dato puncto K etiam punctum M datur.

Componetur autem propositio hæc in hunc modum. Capiatur media proportionalis inter ipsas EΘ, EZ; sitque ea recta EK. Manifestum autem est rectam ΘK majorem esse quam KZ. Quoniam enim EΘ est ad EK sicut EK ad EZ; differentia antecedentium ad differentiam consequentium, sive ΘK ad KZ, erit in eadem ratione. Sed EΘ major est quam EK, adeoque ΘK major est quam KZ. Fiat autem ipsi ΘK æqualis recta KM; eritque punctum M punctum quæsitum: hoc est, rectangulum ΘE in ZM æquale erit rectangulo MK in KΘ. Etenim quia EΘ est ad EK ut KE ad EZ; erit per conversionem rationis ac permutando, ΘE ad EK ut ΘK ad KZ. Sed ΘK *æqualis est ipsi* MK, *quare* ΘE *erit* ad EK ut MK ad KZ; ac per conversionem rationis, EΘ erit ad KΘ sicut MK ad MZ: quapropter rectangulum ΘE in MZ æquale erit rectangulo MK in KΘ. Junctâ itaque KH, ac in directum productâ, dico quod recta HΛ satisfacit proposito: sive quod ΛE est ad ZK ut ΘH ad ZM. Namque rectangulum ΘE in ZM æquale est rectangulo MK in KΘ, unde EΘ est *ad* ΘK sicut KM ad MZ; ac dividendo EK erit ad KΘ sicut KZ ad ZM. Sed EK est ad KΘ ut ΛE est ad ΘH; quare ΛE *est ad* ΘH ut KZ ad ZM, & permutando ΛE est ad KZ ut ΘH ad ZM. Quocirca rite construitur, si capiatur EK media proportionalis inter ipsas ΘE, EZ; ac juncta recta HK producatur ad Λ.

Jam inquirendum est, an recta HΛ auferat rationem ΛE ad ZK, majorem vel minorem præ omnibus rectis quæ duci possunt per punctum H, quæque rectis EB, ZΓ occurrunt. Determinatur autem problema hunc in modum. Manentibus descriptis, una cum rectâ parallelâ; capiatur media proportionalis inter rectas EΘ, EZ, puta EK: junctaque recta KH producatur in directum. Oportet invenire an recta HΛ secet rationem ΛE ad ZK, majorem vel minorem præ illis quas auferunt rectæ quævis aliæ, per punctum H ductæ, rectasque EB, ZΓ intersecantes. Ponatur recta KM ipsi KΘ æqualis, ac rectangulum ΘE in MZ æquale erit rectangulo MK in KΘ: ratio autem ΛE ad ZK æqualis erit rationi ΘH ad ZM.

Ducatur jam recta alia ut HN, ac conferenda venit ratio ΞE ad ZN cum ratione ΛE ad ZK; cumque ΛE est ad ZK ut ΘH ad ZM, conferenda erit ratio ΞE ad ZN cum ratione ΘH ad ZM, ac permutando comparanda erit ratio ΞE ad ΘH *cum ratione* NZ *ad* ZM. *Sed ratio* ΞE *ad* ΘH *æqualis* est rationi EN ad NΘ. Quare conferatur ratio EN ad NΘ cum ratione NZ ad ZM; ac componendo conferatur ratio EΘ ad ΘN cum ratione NM ad MZ: adeoque comparandum venit rectangulum ΘE in MZ cum rectangulo MN in NΘ. Manifestum autem est rectangulum MK in KΘ majus esse rectangulo MN in NΘ, quia punctum K secat rectam ΘM bifariam in medio. Sed rectangulum EΘ in MZ æquale est rectangulo MK in KΘ; ergo rectangulum EΘ in MZ majus est rectangulo MN in NΘ: unde ratio EΘ ad ΘN major erit ratione NM ad MZ. Dividendo autem erit ratio EN ad NΘ major ratione NZ ad ZM. Sed EN est ad NΘ ut EΞ ad ΘH; igitur ratio EΞ ad ΘH major erit ratione NZ ad ZM: ac permutando, erit ratio ΞE ad NZ major ratione ΘH ad MZ. Cum autem ΘH est ad MZ ut ΛE ad ZK, ratio ΞE ad NZ major erit ratione ΛE ad ZK. Recta itaque HΛ aufert rationem minorem, quam quæ aufertur à recta HΞ. Hinc constat hanc rectam HΛ abscindere rationem minorem rationibus, quæ auferri possint à rectis quibuscunque per punctum H ductis, ipsisque ZΓ, EB occurrentibus.

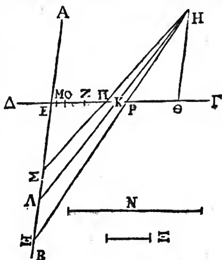
Quoniam autem recta HΛ abscindit rationem minorem, quam quas rectæ quævis, per punctum H ductæ, auferunt à rectis ZΓ, EB: Dico quoque quod rectæ propiores ipsi HΛ auferunt rationes minores, quam quæ auferuntur à remotioribus ab eâ. Quoniam enim ratio ΞE ad ZN major est ratione ΛE ad ZK, hoc est, quam ΘH ad ZM; ponamus ΘH esse ad rectam aliquam ZO sicut ΞE ad ZN; quæ proinde

minor

minor erit quam ZM. Ac ex demonstratis constat rectangulum EΘ in ZO æquale esse rectangulo ON in NΘ. Cum autem ratio ΞE ad ZN æqualis est rationi ΘH ad ZO, ducatur recta alia, ut HP; ac comparanda sit ratio ΠE ad ZP cum ratione ΞE ad ZN. Quoniam vero ΞE est ad ZN ut ΘH ad ZO, conferatur ratio ΠE ad ZP cum ratione ΘH ad ZO: ac permutando, conferatur ratio ΠE ad ΘH cum ratione PZ ad ZO. Sed ratio ΠE ad ΘH est ut EP ad PΘ; adeoque componendo, comparanda est ratio ΘE ad PΘ cum ratione PO ad ZO; ac rectangulum ΘE in ZO comparandum cum rectangulo ΘP in PO. Est autem rectangulum ΘE in ZO æquale rectangulo ON in NΘ; quare conferendum est rectangulum ON in NΘ cum rectangulo OP in PΘ. Conferendum est etiam rectangulum OK in KΘ cum rectangulo ON in NΘ. Quoniam vero rectangulum ΘE in OZ æquale est rectangulo ON in NΘ, conferendum est rectangulum OK in KΘ cum rectangulo EΘ in OZ. Rectangulum autem MK in KΘ æquale est rectangulo ΘE in MZ. Si itaque auferatur è rectangulo EΘ in MZ rectangulum EΘ in OZ, & è rectangulo MK in KΘ rectangulum OK in KΘ; residuum MO in EΘ majus erit residuo MO in KΘ. Quoniam autem rectangulum ΘE in MZ æquale est rectangulo MK in KΘ, ac rectangulum MO in EΘ majus est rectangulo MO in KΘ; manifestum est rectangulum OZ in EΘ majus esse rectangulo OK in KΘ. Sed rectangulum ON in NΘ æquale est rectangulo OZ in ΘE; quare rectangulum ON in NΘ minus est rectangulo OK in KΘ: unde etiam consequetur rectangulum ON in NΘ majus esse rectangulo OP in PΘ. Rectangulum vero OZ in ΘE æquale est rectangulo ON in NΘ; igitur rectangulum OZ in ΘE majus est rectangulo OP ad PΘ; quare ratio EΘ ad ΘP major erit ratione PO ad OZ: ac dividendo, ratio EP ad PΘ, hoc est ΠE ad HΘ, major erit ratione PZ ad ZO. Permutando autem, ratio ΠE ad PZ major erit ratione HΘ ad ZO. Sed est HΘ ad ZO ut EΞ ad ZN; quapropter ratio ΠE ad PZ major est ratione ΞE ad ZN. Recta itaque HΞ aufert rationem minorem quam quæ aufertur à recta HΠ. Recta autem HΞ propior est ipsi HΛ quam est recta HΠ, unde manifestum est rectas propiores rectæ HΛ abscindere rationes minores quam remotiores ab eâ.

Construe-

Conſtruetur itaque problema hunc in modum. Manentibus quæ prius, una cum recta parallela; capiatur EK media proportionalis inter ΘE & EZ; junctaque HK producatur ad Λ; ac recta HΛ auferet rationem ΛE ad ZK. Ratio autem data vel erit ipſa ratio ΛE ad ZK, vel minor illâ vel major. Ac ſi fuerit ratio ut ΛE ad ZK, recta HΛ ſatisfacit problemati: & patet quod ea ſola hoc præſtat. Quod ſi minor fuerit quam ratio ΛE ad ZK, tunc impoſſibile eſt problema. Sin autem ratio data, nempe N ad Ξ, major fuerit ratione ΛE ad ZK; fiat ipſi ΘK æqualis recta KM: & rectangulum EΘ in ZM æquale erit rectangulo MK in KΘ, ac ratio ΛE ad ZK æqualis erit rationi ΘH ad ZM. Eſt autem ratio N ad Ξ major ratione ΛE ad ZK, hoc eſt ratione ΘH ad MZ. Fiat itaque ut N ad Ξ ita ΘH ad rectam aliam ipſa ZM minorem, puta ad ZO. Quoniam vero EΘ in MZ æquale eſt MK in KΘ, ac MO in EΘ majus eſt quam MP in KΘ; manifeſtum eſt rectangulum OZ in EΘ minus eſſe quam OK in KΘ; adeoque poſſibile erit applicare rectangulum illud ad rectam OΘ.

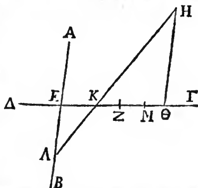


Quapropter ſi rectangulum æquale rectangulo EΘ in OZ deficiens quadrato applicetur ad rectam ΘO, ad utramque partem puncti K, habebuntur puncta Π & P. Ductiſque rectis HΠ, HP, producantur ad Σ, Ξ. Dico utramque rectam HΣ, HΞ ſatisfacere problemati, ſive quod ratio N ad Ξ eſt ut ΣE ad ZΠ, vel ut ΞE ad ZP. Quoniam enim rectangulum ΘE in ZO æquale eſt rectangulo OΠ in ΠΘ, erit EΘ ad ΘΠ ſicut ΠO ad OZ; & dividendo, ratio EΠ ad ΠΘ erit ut ΠZ ad ZO. Sed EΠ eſt ad ΠΘ ut ΣE ad ΘH; adeoque ΣE eſt ad ΘH ut ΠZ ad ZO; ac permutando erit ΣE ad ΠZ ſicut ΘH ad ZO. Eſt autem ΘH ad ZO ut N ad Ξ; ergo EΣ eſt ad ΠZ ſicut N ad Ξ: utraque igitur è rectis HΣ, HΞ ſolvit

ſolvit problema. Ac manifeſtum eſt quod rectæ ab utraque parte propiores ipſi ΗΛ, auferunt rationes minores quam remotiores ab eadem.

Limes autem rationis habetur hoc modo. Ratio ΛΕ ad ΖΚ eſt ut ΘΗ ad ΖΜ. Eſt autem ΖΜ exceſſus ipſarum ΘΕ, ΕΖ ſimul ſumptarum ſupra ipſas ΘΕ, ΕΜ. At ΘΕ, ΕΜ ſimul ſumptæ æquantur *duplo* ipſius ΚΕ; quia ΘΚ æqualis eſt ipſi ΚΜ. Duplum autem ipſius ΚΕ idem poteſt quod quater ΘΕ in ΕΖ; quia ΕΚ media eſt proportionalis inter ΘΕ & ΕΖ. Igitur recta ΖΜ exceſſus erit, quo ipſæ ΘΕ, ΕΖ ſimul ſumptæ excedunt illam, quæ poteſt id quod quater ſub rectis ΘΕ, ΕΖ continetur. Ratio itaque ΛΕ ad ΖΚ (quæ minor eſt ratione quâvis, rectis per punctum Η ductis, ab ipſis ΕΒ, ΖΓ auferendâ) *eadem eſt cum ratione* ΘΗ *ad exceſſum, quo ipſæ* ΘΕ, ΕΖ *ſimul ſumptæ ſuperant* illam quæ poteſt quater id quod ſub ΘΕ, ΕΖ continetur.

Caſ. III. Manentibus jam deſcriptis, ac ductâ rectâ parallelâ: ducatur juxta modum tertium recta ΗΛ, auferens ab ipſis ΕΖ, ΕΒ rectas ΛΕ, ΚΖ in ratione datâ. Fiat ΘΗ ad ΖΜ ſicut ΛΕ ad ΚΖ; ac datâ rectâ ΗΘ, recta ΖΜ dabitur magnitudine & poſitione. Cum autem punctum Ζ datur, datum eſt punctum Μ; ac ob datum punctum Θ, recta ΘΜ datur *magnitudine & poſitione.*



Quoniam autem ΛΕ eſt ad ΚΖ ut ΘΗ ad ΖΜ, erit permutando, ΛΕ *ad* ΘΗ *ſicut* ΚΖ *ad* ΖΜ. *Sed* ΛΕ *eſt ad* ΘΗ *ut* ΚΕ *ad* ΚΘ; *adeoque* ΚΕ eſt ad ΚΘ ſicut ΚΖ ad ΖΜ; ac componendo, erit ΘΕ ad ΚΘ ut ΚΜ ad ΜΖ. Eſt igitur rectangulum ΕΘ in ΖΜ æquale rectangulo ΘΚ in ΚΜ. Datur autem rectangulum ΕΘ in ΖΜ, datâ nempe utrâque è rectis ΕΘ, ΖΜ; adeoque rectangulum ΘΚ in ΚΜ datur. Applicando itaque ad rectam datam ΘΜ rectangulum illud datum excedens quadrato, habebitur punctum Κ. Ob datum autem punctum Η dabitur etiam poſitione recta ΗΚΛ.

Conſtruetur autem problema hunc in modum. Manentibus quæ

quæ prius, ac ductâ rectâ parallelâ; sit ratio data sicut N ad Ξ: sitq; in eadem ratione ΘH ad ZM: dein applicetur ad rectam ΘM rectangulum æquale rectangulo ΘE in ZM excedens quadrato. Fieri autem nequit ut rectangulum ΘE in ZM sit minus rectangulo ΘZ in ZM, quia recta EΘ major est ipsa ΘZ: nec majus quam ΘE in EM, quia recta EM major est ipsâ ZM. Unde patet punctum K cadere inter puncta E, Z. Sit autem rectangulum illud ΘK in KM. Jungatur HK ac producatur ad Λ. Dico rectam HKΛ satisfacere problemati, sive quod ΛE est ad KZ sicut N ad Ξ. Quoniam enim EΘ in ZM æquale est rectangulo ΘK in KM, erit EΘ ad ΘK sicut KM ad MZ: ac dividendo, erit EK ad KΘ, hoc est EΛ ad HΘ, sicut KZ ad ZM. Permutando autem, EΛ erit ad KZ ut ΘH ad ZM. Sed ΘH est ad ZM sicut N ad Ξ. Quare EΛ erit ad KZ sicut N ad Ξ; adeoque recta HΛ solvet problema. Dico etiam quod ea sola hoc præstat. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut HP; quæ auferat rationem N ad Ξ. Erit itaque PE ad OZ sicut ΛE ad KZ. Hoc autem impossibile est, cum antecedens minor sit antecedente, & consequens major consequente. Unde manifestum est rectam HP auferre rationem minorem quam quæ ablata est ab ipsâ HΛ.

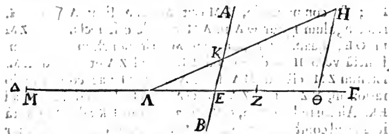
Cas. IV. Manentibus quæ prius, una cum rectâ parallelâ; ducatur jam, secundum modum quartum, recta HΛ, abscindens à rectis EΑ, ZΔ rationem EK ad ΛZ æqualem rationi datæ. Fiat in eadem ratione ΘH ad ZM; atque ob datam ΘH, ipsa ZM dabitur magnitudine & positione: ac ob datum punctum Z, punctum M quoque datur. Quoniam autem ΘH est ad ZM ut EK ad ZΛ; erit permutando, ΘH ad EK, hoc est ΘΛ ad ΛE, sicut MZ ad ZΛ. Per conversionem autem rationis, erit ΘΛ ad ΘE sicut MZ ad MΛ; quare rectangulum ZM in ΘE æquale erit rectangulo ΘΛ in ΛM. Sed datur rectangulum ZM in ΘE, datâ nempe utrâque ZM, ΘE; quare rectangulum ΘΛ in ΛM datum est. Applicando itaque

ad

ad rectam datam Θ M rectangulum illud deficiens quadrato, punctum Λ dabitur. Cum autem punctum H datur, etiam recta H Λ dabitur magnitudine & positione.

Quoniam autem in compositione, oportet Θ H esse ad Z M in ratione proposita; & applicari ad rectam Θ M rectangulum æquale rectangulo Θ E in Z M deficiens quadrato, nempe rectangulum Θ Λ in Λ M; ac jungi rectam H Λ: punctum illud Λ haberi non potest in omni casu. Adeoque constructio problematis non semper possibilis est, nec in omni casu. Modo autem singulari fit, si recta M Θ bifariam secetur in puncto Λ. Erit autem propositio hujusmodi.

Ut extrema hæc ratio habeatur, ponamus eam ut Θ H ad Z M; & bisectâ ipsâ Θ M in Λ, oportet rectangulum Θ Λ in Λ M reperiri æquale rectangulo Z M in Θ E. Puta factum,



sitque ea ut Θ H ad Z M; ac bisecetur Θ M in puncto Λ, ita ut rectangulum Θ Λ in Λ M æquale sit rectangulo Z M in Θ E. Quoniam rectangulum Θ Λ in Λ M æquale est rectangulo Z M in Θ E, erit Λ Θ ad Θ E sicut Z M ad M Λ; dividendo autem, Z Λ erit ad M Λ sicut Λ E ad E Θ. Sed M Λ æqualis est ipsi Λ Θ, adeoque erit Z Λ ad Λ Θ sicut Λ E ad E Θ; permutando vero ac dividendo, habebitur Z E ad Λ E sicut Λ E ad Θ E. Quapropter Λ E media est proportionalis inter Θ E & E Z. Datâ autem utrâque Θ E, E Z, datur etiam E Λ magnitudine & positione: cumque punctum E datur, dabitur quoque punctum Λ. Dato autem puncto Θ, recta Θ Λ etiam datur, cui æqualis est recta Λ M; adeoque recta Λ M datur magnitudine & positione. Datum autem est punctum Λ; quare punctum M, hoc est punctum quæsitum, innotescit.

Componetur autem propositio hunc in modum. Manentibus descriptis, ductâque recta parallela; capiatur B Λ media proportionalis inter ipsas Θ E, E Z, ac ponatur M Λ ipsi Θ Λ

æqualis

æqualis. Dico quod punctum M est punctum quæsitum; quodque rectangulum Θ Λ in Λ M æquale est rectangulo Z M in Θ E. Quoniam enim E Λ media proportionalis est inter ipsas E Z & Θ E, erit Z E ad E Λ sicut E Λ ad Θ E. Summa autem antecedentium est ad summam consequentium in eadem ratione, adeoque Λ Z ad Θ Λ erit ut Λ E ad E Θ. At recta Θ Λ æqualis est ipsi Λ M; quare Z Λ est ad Λ M sicut Λ E ad

E Θ; & componendo, Z M erit ad M Λ sicut Λ Θ ad Θ E. Rectangulum igitur Θ Λ in Λ M æquale erit rectangulo Z M in Θ E; quapropter punctum M erit punctum quæsitum. Junctâ vero H Λ, dico quod E K est ad Z Λ ut Θ H ad Z M. Etenim Z M est ad M Λ sicut Λ Θ ad Θ E; ac convertendo rationem, M Z erit ad Z Λ ut Θ Λ ad Λ E, hoc est ut Θ H ad E K. Alternando autem, Θ H erit ad Z M ut E K ad Z Λ. Captâ itaque ad constructionem rectâ E Λ mediâ proportionali inter Θ E, E Z, jungatur H Λ. Ac manifestum est rectam H Λ auferre rationem E K ad Z Λ, vel minorem, vel majorem quâvis aliâ ratione, quæ à recta quacunque per punctum H ductâ, ipsisque E Λ, Z Δ occurrente, abscindi potest.

Hoc autem determinatur hunc in modum. Manentibus quæ prius, ac ductâ rectâ parallelâ, capiatur media proportionalis inter Θ E, E Z ut E Λ; junctâque H Λ, inquiratur primo an recta H Λ auferat rationem E K ad Z Λ, majorem vel minorem quâvis aliâ rectâ per punctum H ducendâ, rectisque Z Δ, E Λ occurrente. Sit Λ M æqualis ipsi Θ Λ; ac rectangulum Θ Λ in Λ M æquale rectangulo Z M in Θ E; adeoque erit ratio E K ad Z Λ sicut Θ H ad Z M. Ducatur jam alia recta ut H N; ac comparanda est ratio E K ad Z Λ, cum ratione E Ξ ad Z N. Est autem E K ad Z Λ ut Θ H ad Z M, adeoque conferenda est ratio Θ H ad Z M cum ratione E Ξ ad Z N. Alternando autem, conferatur ratio Θ H ad Ξ E cum ratione Z M ad Z N. Sed Θ H est ad Ξ E sicut Θ N ad N E. Conferatur

ergo ratio ΘN ad NE cum ratione MZ ad ZN. Per conversionem autem rationis, conferatur ratio ΘN ad ΘE cum ratione MZ ad MN; unde comparandum venit rectangulum ZM in ΘE cum rectangulo ΘN in NM. Sed rectangulum ZM in ΘE æquale est rectangulo ΘΛ in ΛM, adeoque conferendum erit rectangulum ΘΛ in ΛM cum rectangulo ΘN in MN. Manifestum autem est quod ΘΛ in ΛM majus est rectangulo ΘN in NM; quia punctum Λ dividit rectam ΘM in medio: quare rectangulum ΘN in NM minus erit rectangulo ΘE in ZM, adeoque ratio ΘN ad ΘE minor erit ratione ZM ad MN. Convertendo autem rationem, erit ratio ΘN ad NE, sive ΘH ad EΞ, major ratione MZ ad ZN: ac permutando, ratio ΘH ad ZM, hoc est EK ad ZΛ, major erit ratione EΞ ad ZN. Recta igitur HΛ aufert rationem majorem quam HN: unde patet rectam HΛ abscindere rationem majorem quavis aliâ rectâ, per punctum H transeunte, ipsisque ZΔ, EΛ occurrente.

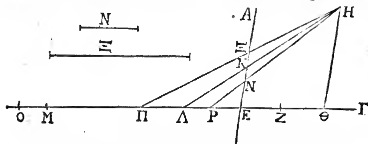
Dico præterea quod rectæ propiores ipsi HΛ auferunt rationes majores, quam quæ secantur à remotioribus ab ea. Quoniam enim ratio ΞE ad ZN minor est ratione EK ad ZΛ, sive ΘH ad ZM; fiat ut EΞ ad ZN, ita ΘH ad rectam aliam, quæ major erit quam ZM, puta ad ZO. Ac juxta jam demonstrata rectangulum ΘE in ZO æquale erit rectangulo ΘN in NO. Ducatur jam recta alia ut HP, ac comparanda venit ratio EΞ ad ZN cum ratione EΠ *ad* ZP. *Sed* EΞ *est ad* ZN *ut* ΘH *ad* ZO; quare conferenda est ratio ΘH ad ZO cum ratione EΠ ad ZP; atque alternando, conferenda ratio ΘH ad EΠ, sive ΘP ad PE, cum ratione OZ ad ZP. Convertendo autem rationem, conferenda est ratio ΘP ad ΘE cum ratione OZ ad OP; adeoque rectangulum ZO in ΘE cum rectangulo ΘP in PO. Sed rectangulum ΘE in ZO

F æquale

æquale eſt rectangulo ΘN in NO; quare comparandum eſt rectangulum ΘN in NO cum rectangulo ΘP in PO. Conferatur etiam rectangulum ΘΛ in ΛO cum rectangulo ΘN in NO. Cum autem ΘN in NO æquale eſt rectangulo ZO in ΘE, conferendum eſt rectangulum ΘΛ in ΛO cum rectangulo ZO in ΘE. Sed ex præmiſſis liquet rectangulum ΘΛ in ΛM æquari rectangulo ΘE in ZM. Sublato itaque rectangulo ΘΛ in ΛM è rectangulo ΘΛ in ΛO, & rectangulo ΘE in ZM è rectangulo ΘE in ZO, comparandum eſt reſiduum cum reſiduo, ſive rectangulum ΘΛ in MO cum rectangulo ΘE in MO. Manifeſtum autem eſt rectangulum ΘΛ in MO majus eſſe rectangulo ΘE in MO, quia ΘΛ major eſt quam ΘE. Quoniam vero rectangulum ΘE in MO minus eſt rectangulo ΘΛ in MO, ac rectangulum ΘE in ZM æquale *eſt rectangulo* ΘΛ *in* ΛM; *rectangulum totum* ΘE in ZO minus erit toto rectangulo ΘΛ in ΛO. Rectangulum autem ΘE in ZO æquale eſt rectangulo ΘN in NO; adeoque rectangulum ΘN in NO minus eſt rectangulo ΘΛ in ΛO. Unde conſtat rectangulum ΘP in PO minus eſſe quam ΘN in NO. Cum autem rectangulum ΘN in NO æquale eſt rectangulo ΘE in ZO, rectangulum ΘP in PO etiam minus erit rectangulo ΘE in ZO; ac ratio PΘ ad ΘE minor erit ratione OZ ad PO. Per converſionem vero rationis, ΘP erit ad PE, ſive ΘH ad EΠ, in majore ratione quam OZ ad ZP: ac alternando, ΘH erit ad OZ in majore ratione quam EΠ ad ZP. Eſt autem ΘH ad OZ ſicut EΞ ad ZN: quare ratio EΞ ad ZN major eſt ratione EΠ ad ZP. Igitur recta HN, quæ propius diſtat *ab ipſa* HΛ, aufert rationem majorem quam quæ ſecatur à recta remotiore HP. Ac manifeſtum eſt rectas illi propiores ſemper abſcindere rationes majores, quam quæ ſunt remotiores ab eâdem.

Compo-

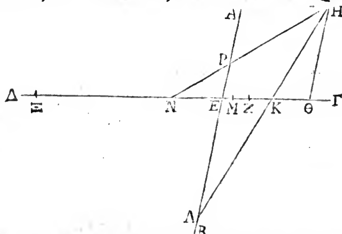
Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus prius descriptis ac rectâ parallelâ; capiatur ΕΛ media proportionalis inter ΕΘ, ΕΖ: ac jungatur recta ΗΛ auferens rationem ΕΚ ad ΖΛ. Ac si recta ΗΛ satisfacit proposito problemati, patet quod ea sola hoc præstat: quod si major fuerit ratione ΕΚ ad ΖΛ, impossibile erit problema; quia recta ΗΛ aufert rationem ΕΚ ad ΖΛ, majorem quam quælibet alia recta per punctum Η ducta, ipsisque ΖΔ, ΕΑ occurrens. At si proponatur ratio aliqua Ν ad Ξ, minor quam ratio ΕΚ ad ΖΛ; fiat ΛΜ æqualis ipsi ΛΘ: eritque rectangulum ΖΜ in ΘΕ æquale rectangulo ΘΛ in ΛΜ, ac ΕΚ ad ΖΛ erit ut ΘΗ ad ΖΜ. Jam fiat ut Ν ad Ξ ita ΘΗ ad rectam aliam ipsâ ΖΜ majorem, nempe ad ΖΟ. Cumque rectangulum ΟΜ in ΛΘ majus est rectangulo ΟΜ in ΕΘ, & rectangulum ΜΛ in ΛΘ æquale est rectangulo ΘΕ in ΖΜ; totum rectangulum ΛΘ



in ΛΟ majus erit toto rectangulo ΘΕ in ΖΟ; adeoque rectangulum ΘΕ in ΖΟ applicari potest ad rectam ΘΟ deficiens quadrato: idque duobus modis, ab utrâque scilicet parte puncti Λ. Si itaque per puncta designata Π & Ρ agantur rectæ ΗΠ, ΗΡ; dico quod recta utraque ΗΠ, ΗΡ satisfacit problemati, sive quod ΕΝ est ad ΖΡ sicut Ν ad Ξ: quodque ΕΞ est ad ΖΠ etiam ut Ν ad Ξ. Quoniam enim rectangulum ΘΡ in ΡΟ æquale est rectangulo ΘΕ in ΖΟ, erit ratio ΡΘ ad ΘΕ ut ΖΟ ad ΟΡ; ac per conversionem rationis, ΡΘ ad ΡΕ, hoc est ΘΗ ad ΕΝ, sicut ΖΟ ad ΖΡ. Permutando autem ΘΗ erit ad ΖΟ *ut* ΕΝ *ad* ΖΡ. *Sed* ΘΗ *est ad* ΖΟ ut Ν ad Ξ; quare ΕΝ est ad ΖΡ ut Ν ad Ξ. Ac pari argumento probabitur rationem ΕΞ ad ΖΠ esse ut Ν ad Ξ; quapropter utraque è rectis ΗΠ, ΗΡ solvit problema. Patet etiam rectas ab utraque parte propiores ipsi ΗΛ, auferre rationes majores quam quæ secantur à remotioribus ab eadem.

Innotescit autem extrema ratio hunc in modum. Quoniam EK est ad ZΛ sicut ΘH ad ZM; ac recta ZM æqualis est ipsis ZΛ, ΛM simul sumptis, hoc est, ipsis ΘΛ, ΛZ (ob ΘΛ ipsi MΛ æqualem.) Ipsæ vero ΘΛ, ΛZ simul sumptæ æquales sunt ipsis ΘE, EZ, cum duplo ipsius EΛ simul sumptis. Duplum autem rectæ EΛ potest quater rectangulum ΘE in EZ. Est igitur EK ad ΛZ sicut ΘH ad rectam compositam ex utrâque ΘE, EZ, & rectâ quæ potest quater rectangulum ΘE in EZ.

Invenimus itaque quo pacto construi possit problema secundum omnes casus ejus; ac manifestum est quod in nullo casu fieri potest ut construatur juxta omnes modos. Ductâ enim rectâ parallelâ, & inventâ mediâ proportionali inter ΘE, EZ; fiant EK, EN, eidem mediæ æquales: ac jungantur HN, HΛ. Ponatur etiam KM ipsi ΘK æqualis, ac NΞ ipsi ΘN. Jam ratio minima juxta modum secundum erit ratio ΛE ad ZK, sive ΘH ad ZM: maxima autem ratio juxta modum quartum, erit ut EP ad ZN, sive ut ΘH ad ZΞ. Quoniam

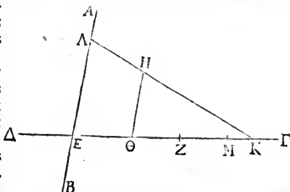


vero minima ratio juxta modum secundum est ut ΘH ad ZM, maxima autem juxta modum quartum ut ΘH ad ZΞ; evidens est rationem ΘH ad ZM majorem esse ratione ΘH ad ZΞ. Adeoque ratio data vel erit ut ΘH ad ZM; vel minor quam ΘH ad ZM, ac major quam ΘH ad ZΞ; vel major quam ΘH ad ZM; vel erit ut ΘH ad ZΞ; vel minor quam ΘH ad ZΞ. Quod si fuerit ut ΘH ad ZM, tribus modis construi potest, nempe juxta casum primum & tertium, quibus abscindi possunt

ſunt rationes quævis; ac modo ſingulari juxta caſum ſecundum: non autem juxta caſum quartum, quia ratio ΘΗ ad ΖΜ major eſt ratione ΘΗ ad ΖΞ. Si fuerit ratio minor quam ΘΗ ad ΖΜ, ac major quam ΘΗ ad ΖΞ; erit problema juxta duos ſolum modos, primum nempe & tertium; neque juxta ſecundum nec quartum caſum efficietur; quia ratio propoſita minor eſt minimâ, ac major maximâ. Quod ſi major fuerit quam ΘΗ ad ΖΜ, erit problema quatuor modis ſolvendum; nempe primo ac tertio, ac dupliciter juxta modum ſecundum; non autem ad modum quartum, quia ratio major eſt maximâ, ſive quam ratio ΘΗ ad ΖΞ; eſt enim ΘΗ ad ΖΜ major ratione ΘΗ ad ΖΞ. At vero ſi maxima fuerit, ſive ut ΘΗ ad ΖΞ, tribus modis conſtruetur; primo ſcilicet & tertio; ac modo ſingulari juxta caſum quartum: non autem juxta modum ſecundum, quia *minor* eſt minima; ratio enim ΘΗ ad ΖΞ minor eſt ratione ΘΗ ad ΖΜ. Quod ſi minor fuerit ratio quam ΘΗ ad ΖΞ, quatuor diverſis modis componetur; primo & tertio, ac dupliciter modo quarto: non autem modo ſecundo, quia ratio data minor eſt minimâ. Oſtendimus itaque an compoſitio fieri poſſit, necne, per omnes varietates rationis proponendæ.

LOCUS SEPTIMUS.

Maneat jam, eodem modo quo prius, punctum datum Η: interſecet autem recta parallela citra punctum Ζ, hoc eſt, cadat inter puncta Ε & Ζ; ut eſt recta ΗΘ. Rectæ autem per punctum Η ductæ habebunt quatuor caſus diverſos: vel enim auferetur ratio è rectis ΖΓ, ΕΑ; vel ex ΖΓ, ΕΑ; vel ex ΖΕ, ΕΒ, vel denique ex ipſis ΖΔ, ΕΑ. *Caſ.* I. Ducatur autem imprimis, juxta modum primum, recta ΚΗΛ auferens à rectis ΖΓ, ΕΑ, rationem ΕΛ ad ΖΚ, æqualem rationi datæ. Fiat ut



E Λ ad Z K ita Θ H ad Z M; dato autem Θ H, datur quoque Z M magnitudine & positione: ac dato puncto Z punctum M etiam datum est. Cum vero E Λ est ad Z K ut Θ H ad Z M, erit alternando, E Λ ad Θ H, hoc est E K ad K Θ, ut K Z ad Z M; ac dividendo, erit E Θ ad Θ K ut K M ad M Z: adeoque rectangulum E Θ in M Z æquale erit rectangulo Θ K in K M. Sed rectangulum E Θ in Z M datur, datâ utrâque rectâ; adeoque rectangulum Θ K in K M etiam datur. Applicando itaque ad rectam datam Θ M rectangulum illud excedens quadrato, habebitur punctum K: ac dato puncto Z, recta etiam K H Λ positione datur.

Construetur autem problema hunc in modum. Manentibus quæ prius, ac ductâ rectâ parallelâ; sit ratio data sicut N ad Ξ; *ac fiat ut* N *ad* Ξ ita Θ H ad Z M: atque applicetur ad rectam Θ M rectangulum æquale rectangulo Θ E in Z M excedens quadrato. Sit illud rectangulum Θ K in K M, ac jungatur recta K H producaturque. Dico quod recta K Λ satisfacit problemati, sive quod E Λ est ad Z K sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum E Θ in Z M æquale est rectangulo Θ K in K M, erit E Θ ad Θ K ut K M ad M Z; ac componendo, erit E K ad K Θ, hoc est E Λ ad Θ H, sicut K Z ad Z M: quare permutando, erit E Λ ad K Z sicut Θ H ad Z M, hoc est ut N ad Ξ (*per constructionem*) adeoque recta K Λ solvit problema. Dico etiam quod sola hoc præstat. Nam si fieri potest ut aliter solvatur, ducatur recta alia ut O H P; ut sit O E ad Z P in ratione E Λ ad Z K. Hoc autem fieri nequit, quia antecedens major est antecedente, & consequens minor consequente; adeoque recta hæc aufert rationem majorem quam quæ abscinditur à recta K Λ.

Cas. II. Manentibus jam descriptis ac rectâ parallelâ; ducatur juxta modum secundum, recta K Λ auferens à rectis Z E, E Λ rationem E Λ ad K Z æqualem rationi datæ. Fiat Θ H ad Z M ut E Λ ad Z K. Quoniam vero E Λ est ad Z K ut Θ H ad Z M, alternando erit E Λ ad Θ H, sive E K ad K Θ, ut K Z ad

ad ZM. Recta autem EK major est quam KΘ, igitur KZ major est quam ZM. Data autem est recta ZM magnitudine & positione; quare dato puncto Z, datur quoque punctum M. Quoniam vero EK est ad KΘ ut KZ ad ZM, erit *dividendo*, EΘ ad ΘK sicut KM ad MZ; ac rectangulum EΘ in ZM æquale erit rectangulo KΘ in KM. Datâ autem utrâque EΘ, ZM, datur etiam rectangulum ΘK in KM, applicandum ad rectam cognitam ΘM deficiens quadrato: unde punctum K innotescet. Cognito autem puncto H, recta quoque KHΛ positione datur.

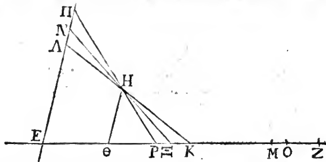
Quoniam vero ad constructionem requiritur, ut fiat ratio ΘH ad ZM æqualis rationi datæ; & ut applicetur ad rectam ΘM rectangulum æquale rectangulo ΘE in ZM deficiens quadrato, nempe rectangulum ΘK in KM; ita ut habeatur punctum K in recta ΘM: hoc autem fieri nequit generaliter. Igitur non semper, neque in omni casu possibile est componere problema.

Fit autem modo singulari, si reperiatur punctum K in medio ipsius ΘM. Punctum vero K, in quo est extrema ratio, investigabitur ad hunc modum.

Ponamus extremam illam rationem esse ut ΘH ad ZM: ac divisâ rectâ MΘ bifariam in medio, oportet fieri rectangulum ΘK in KM æquale rectangulo EΘ in ZM. Restat igitur solum ut inveniatur punctum M in recta ΘZ, tale, ut bisectâ rectâ ΘM in puncto K, rectangulum ΘE in MZ æquale sit rectangulo ΘK in KM. Quoniam vero rectangulum ΘE in MZ æquale est rectangulo ΘK in KM, erit ZM ad MK sicut KΘ ad ΘE: ac componendo, erit ZK ad KM *sive* KΘ, ut KE ad ΘE. Summa autem antecedentium est ad summam

consequentium in eadem ratione, adeoque Z E est ad K E ut K E ad Θ E. Est igitur recta K E media proportionalis inter rectas datas Z E & Θ E; quare & ipsa K E datur magnitudine & positione; ac dato puncto E, punctum K quoque datur. Ob datum autem punctum Θ, datur etiam recta K Θ; cui æqualis est recta K M; datur itaque recta K M magnitudine & positione: ac dato puncto K, dabitur quoque punctum M, hoc est, punctum quæsitum,

Componetur autem Lemma hunc in modum. Maneant quæ prius, una cum rectâ parallelâ, & capiatur E K media proportionalis inter rectas Z E, E Θ; sitque recta K M ipsi Θ K æqualis. Cadet vero *punctum* M citra punctum Z, quia recta Z K major est quam K Θ. Etenim cum Z E est ad E K ut E K ad E Θ, erit differentia antecedentium ad differentiam consequentium in eadem ratione; hoc est Z E ad E K ut Z K ad K Θ. Sed antecedens major est consequente; itaque recta K Z major est quam Θ K. Junctâ autem & productâ rectâ H K; dico quod rectangulum Z M in Θ E æquale est rectangulo Θ K in K M; quodque ratio E Λ ad K Z æqualis est rationi Θ H ad Z M. Quoniam enim recta K E media proportionalis est inter Z E & Θ E; erit Z E ad E K sicut K E ad E Θ; & aufe-



rendo consequentes, erit residuum Z K ad residuum K Θ, hoc est ad K M, in eadem ratione, sive ut E K ad E Θ: ac dividendo, erit Z M ad M K ut K Θ ad Θ E: rectangulum igitur E Θ in Z M æquale est rectangulo M K in K Θ. Quinetiam quia K E est ad E Θ ut Z K ad K M; per conversionem rationis, erit E K ad K Θ, hoc est E Λ ad Θ H, ut K Z ad Z M, ac permutando, E Λ erit ad K Z ut Θ H ad Z M: adeoque efficitur constructio, si inveniatur E K media proportionalis inter ipsas E Θ, E Z, ac jungatur recta K H Λ. Jam inquirendum est an recta

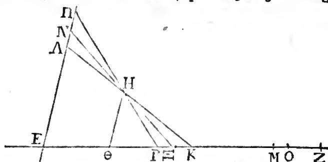
K H Λ

KHΛ auferat rationem majorem an minorem quâlibet aliâ rectâ, per punctum H ductâ, ipsisque EA, ZE occurrente.

Hoc autem determinatur hunc in modum. Manentibus quæ prius, ac ductâ rectâ parallelâ; sit EK media proportionalis inter ZE & EΘ, ac junctâ KHΛ, oportet inquirere an recta KΛ auferat rationem EΛ ad KZ, majorem vel minorem præ omnibus rectis per punctum H ducendis, ita ut occurrant ipsis EA, ZE. Fiat recta MK ipsi KΘ æqualis, & erit rectangulum ΘE in ZM æquale rectangulo ΘK in KM; ac ratio ΛE ad KZ æqualis rationi ΘH in ZM. Ducatur jam recta alia ut NΞ; & oportet conferre rationem NE ad ZΞ cum ratione ΛE ad ZK, hoc est, cum ratione ΘH ad ZM. Alternando autem, comparanda est ratio NE ad ΘH, sive EΞ ad ΞΘ, cum ratione ΞZ ad ZM; ac dividendo, comparanda est ratio EΘ ad ΘΞ cum ratione ΞM ad ZM: unde conferre licet rectangulum EΘ in ZM cum rectangulo ΘΞ in ΞM. Sed rectangulum ΘE in ZM æquale est rectangulo ΘK in KM; conferendum est igitur rectangulum ΘK in KM cum rectangulo ΘΞ in ΞM. Constat autem rectangulum ΘK in KM majus esse rectangulo ΘΞ in ΞM; quia ΘK æqualis est ipsi KM, ac proinde quadratum ex ΘK majus est rectangulo ΘΞ in ΞM. At rectangulum ΘK in KM æquale est rectangulo ΘE in ZM; quare rectangulum ΘE in ZM majus est rectangulo ΘΞ in ΞM; atque adeo ratio ΘE ad ΞΘ major est ratione ΞM ad ZM. Componendo autem ratio EΞ ad ΞΘ, sive EN ad ΘH, major erit ratione ΞZ ad ZM; ac permutando ratio EN ad ZΞ major erit ratione ΘH ad ZM, hoc est ratione EΛ ad ZK. Quapropter recta KΛ aufert rationem minorem, quam quæ abscinditur à recta NΞ. Et manifestum est quod ex omnibus rectis per punctum H ductis, ipsasque ΘZ, EA intersecantibus, recta KΛ minorem aufert rationem.

Quoniam autem ratio EΛ ad ZK, sive ΘH ad ZM, minor est ratione EN ad ZΞ; faciamus ut EN ad ZΞ ita ΘH ad rectam aliam, quæ proinde minor erit quam ZM, puta ad ZO: ac manifestum est ex præmissis, quod rectangulum ΘE in ZO æquale erit rectangulo ΘΞ in ΞO. Ducatur jam recta alia ut ΠP, ac comparanda est ratio EN ad ZΞ, sive ΘH ad ZO, cum ratione EΠ ad PZ. Permutando autem conferatur ratio EΠ ad ΘH, sive EP ad PΘ, cum ratione PZ ad ZO; ac dividendo,

videndo, conferenda venit ratio ΘΕ ad ΡΘ cum ratione ΡΟ ad ΖΟ; adeoque rectangulum ΘΕ in ΖΟ cum rectangulo ΘΡ in ΡΟ conferendum. Est autem rectangulum ΘΕ in ΖΟ æquale rectangulo ΘΞ in ΞΟ; quare comparandum est rectangulum ΘΞ in ΞΟ cum rectangulo ΘΡ in ΡΟ. Præterea conferatur rectangulum ΘΚ in ΚΟ cum rectangulo ΘΞ in ΞΟ. Quoniam vero rectangulum ΘΞ in ΞΟ æquale est rectangulo ΕΘ in ΖΟ, conferatur rectangulum ΘΚ in ΚΟ cum rectangulo ΕΘ in ΖΟ. Probatur autem rectangulum ΘΚ in ΚΟ majus esse rectangulo ΕΘ in ΖΟ; quia ΕΘ in ΖΜ majus est rectangulo ΕΘ in ΖΟ. Est vero rectangulum ΕΘ in ΖΜ æquale rectangulo ΘΚ in ΚΜ, *quo majus est rectangulum*



ΘΚ *in* ΚΟ: *quare rectangulum* ΘΚ *in* ΚΟ *majus est rectangulo* ΕΘ *in* ΖΜ, *ac multo majus quam* ΕΘ *ad* ΖΟ. Rectangulum autem ΕΘ in ΖΟ æquale est rectangulo ΘΞ in ΞΟ; quocirca rectangulum ΘΚ in ΚΟ majus erit quam ΘΞ in ΞΟ: unde etiam manifestum est rectangulum ΘΞ in ΞΟ majus esse rectangulo ΘΡ in ΡΟ, adeoque rectangulum ΕΘ in ΖΟ majus erit quam ΘΡ in ΡΟ. Quapropter ratio ΕΘ ad ΘΡ major erit ratione ΡΟ ad ΖΟ; ac componendo ratio ΕΡ ad ΡΘ, sive ΕΠ ad ΘΗ, major erit ratione ΡΖ ad ΖΟ. Alternando vero ratio ΕΠ ad ΡΖ major erit ratione ΘΗ ad ΖΟ, sive ΕΝ ad ΖΞ. Aufert itaque recta ΝΞ rationem minorem quam quæ abscinditur à recta ΠΡ. Rectæ igitur ipsi ΚΛ propiores abscindunt semper rationes minores, quam rectæ quæ sunt remotiores ab eadem.

Componetur autem problema hunc in modum. Maneant quæ supra; ac ductâ rectâ parallelâ, fiat ΕΚ media proportionalis inter ΕΖ, ΕΘ; & jungatur recta ΗΚΛ. Hæc recta ΚΛ auferet rationem ΕΛ ad ΚΖ minorem qualibet aliâ, quæ à

rectis

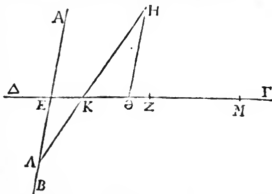
rectis ZΘ, BA resecari possit, rectâ per punctum H ducendâ. Ratio autem proposita vel eadem erit cum ratione EΛ ad KZ; vel minor erit eâ; vel major. Si fuerit eadem, tum recta KΛ satisfacit problemati. Ac patet quod ea sola; quia rectæ omnes per punctum H ductæ auferunt rationes majores quam quæ secatur ab ipsa KΛ. Quod si minor fuerit eâ, problema impossibile erit; quia auferenda est ratio minor minimâ. Sin major fuerit ratio ratione EΛ ad KZ, ut est ratio N ad Ξ; fiat KM ipsi ΘK æqualis, & rectangulum EΘ in MZ æquale erit rectangulo ΘK in KM: & ratio EΛ ad KZ æqualis erit rationi ΘH ad ZM. Cum autem ratio N ad Ξ major est ratione EΛ ad KZ, sive ΘH ad ZM; faciamus ut N ad Ξ ita ΘH ad rectam aliam minorem ipsâ ZM, puta ad ZO. Quoniam vero rectangulum EΘ in ZM æquale est rectangulo ΘK in KM, erit rectangulum EΘ in ZO minus rectangulo ΘK in KO; quare fieri potest ut ad rectam ΘO applicetur rectangulum, æquale rectangulo EΘ in ZO deficiens quadrato, duobus quidem modis; ab utraque scilicet parte puncti K: quo facto habebuntur puncta requisita, nempe puncta Ξ, P. Junctis igitur rectis ΞH, PH, ac productis; dico quod utraque è rectis ΠP, NΞ satisfacit problemati; sive quod EΠ est ad ZP, ac EN ad ZΞ, sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum EΘ in ZO æquale est rectangulo ΘP in PO, erit EΘ ad ΘP sicut PO ad ZO. Componendo autem ac deinde permutando, erit EΠ ad PZ sicut ΘH ad ZO, hoc est ut N ad Ξ; adeoque recta ΠP solvit problema. Pari etiam modo probabitur rectam ΞN idem præstare; adeoque utraque ex illis solutionem præbet. Ac manifestum est rectas utrinque propiores ipsi KΛ abscin-

 dere

dere rationes minores, quam quæ auferuntur à remotioribus ab eadem.

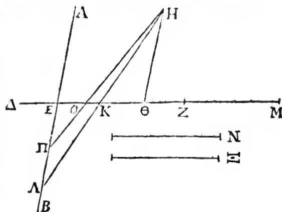
Extrema autem ratio determinatur hunc in modum. Quoniam ratio E Λ ad K Z est ut Θ H ad Z M; ac Z M est excessus utrarumq; E Z, E Θ supra utrasque M E, E Θ simul sumptas: ipsæ autem M E, E Θ simul sumptæ valent duplum ipsius K E, quia recta M K æqualis est ipsi K Θ; duplum vero ipsius K E potest quater rectangulum Z E in Θ E, quia media proportionalis est inter ipsas. Erit igitur ratio illa minima æqualis rationi ipsius Θ H ad excessum, quo ipsæ Z E, Θ E simul sumptæ superant rectam, quæ potest quater rectangulum Z E in Θ E.

Cas. III. Manentibus quæ supra, ductâque rectâ parallelâ; ducatur jam recta K Λ, juxta modum tertium, auferens à rectis E B, Z E rationem Λ E ad Z K, æqualem rationi datæ: ac fiat Θ H ad Z M sicut Λ E ad Z K. Data autem est recta Θ H, datur itaque recta Z M tum magnitudine tum positione; ac dato puncto Z, etiam punctum M datur; adeoque recta Θ M quoque datur. Quoniam vero Λ E est ad K Z sicut Θ H ad Z M, erit permutando Λ E ad Θ H, hoc est E K ad K Θ, ut K Z ad Z M; quare componendo, erit E Θ ad Θ K sicut K M ad M Z; unde rectangulum Θ E in M Z æquale erit rectangulo M K in K Θ. Datur autem rectangulum E Θ in M Z, datâ scilicet utrâque rectâ; adeoque rectangulum M K in K Θ datur. Applicando igitur illud ad rectam datam M Θ excedens quadrato, punctum K datur; ac dato puncto H, etiam recta K Λ positione datur.

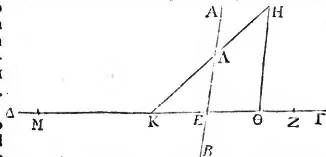


Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus descriptis, ductâque rectâ parallelâ, sit ratio data sicut N ad Ξ; ac fiat Θ H ad Z M sicut N ad Ξ: dein applicetur ad rectam Θ M rectangulum æquale rectangulo Θ E in M Z excedens quadrato, nempe rectangulum M K in K Θ. Jungatur H K, quæ producatur *ad* Λ. Dico quod recta H Λ solvit problema,

blema, sive quod Α Ε est ad Κ Ζ sicut Ν ad Ξ. Quoniam enim rectangulum Ε Θ in Μ Ζ æquale est rectangulo Μ Κ in Κ Θ, erit Ε Θ ad Θ Κ sicut Κ Μ ad Μ Ζ; ac dividendo, Ε Κ ad Κ Θ, hoc est Λ Ε ad Η Θ, sicut Κ Ζ ad Ζ Μ. Alternando autem Λ Ε erit ad Κ Ζ sicut Θ Η ad Ζ Μ, sive ut Ν ad Ξ. Quapropter recta Η Λ solvit problema. Dico quoque quod ea sola hoc præstat. Nam si fieri potest, ducatur alia, ut Η Π; ac si recta Η Π aufert eandem rationem Ν ad Ξ, erit Λ Ε ad Κ Ζ sicut Π Ε ad Ο Ζ. Hoc autem impossibile est, quia antecedens *minor est antecedente* & consequens major consequente. Unde manifestum est rectam Η Π abscindere rationem minorem, quam quæ aufertur à recta Η Λ.



Cas. IV. Manentibus descriptis, ductâque rectâ parallelâ; ducatur jam modo quarto, recta Η Κ auferens à rectis Ε Α, Ζ Δ rationem Ε Λ ad Κ Ζ æqualem rationi datæ. Fiat Θ Η ad Ζ Μ sicut Ε Λ ad Κ Ζ; ac datâ rectâ Θ Η, dabitur quoque Ζ Μ magnitudine & positione. Dato autem puncto Ζ, punctum Μ datur; & ob punctum Θ datum recta etiam Θ Μ data est. Quoniam vero Θ Η est ad Ζ Μ sicut Ε Λ ad Κ Ζ; erit permutando Θ Η ad Ε Λ, hoc est Θ Κ ad Κ Ε, sicut Μ Ζ ad Ζ Κ; ac per conversionem rationis, erit Θ Κ ad Θ Ε ut Ζ Μ ad Μ Κ: adeoque rectangulum Θ Ε in Ζ Μ

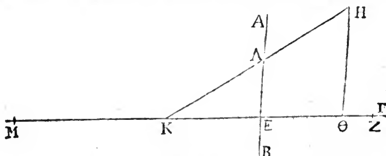


æquale

æquale erit rectangulo Θ K in K M. Sed rectangulum Θ E in Z M datur, rectangulum igitur Θ K in K M datum est. Dein applicando ad rectam datam Θ M rectangulum illud deficiens quadrato, punctum K innotescet. Dato autem puncto H, recta quoque H K Λ positione datur.

Quoniam autem ad constructionem oportet quod Θ H sit ad Z M in ratione propositâ; quodque rectangulum æquale rectangulo Θ E in Z M applicetur ad rectam Θ M deficiens quadrato, nempe Θ K in K M: applicatio ista non semper fieri potest, ob causas modo dictas, nisi fuerit ratio intra certos limites: adeoque non semper effici potest problematis constructio.

Fit autem modo singulari, si reperiatur punctum K in medio ipsius Θ M, eritque Analysis hujusmodi. Ad determinandam extremam rationem, ponamus rationem Θ H ad Z M æqualem illi; ac secemus rectam Θ M bifariam in medio ad punctum K, ita ut rectangulum Z M in Θ E æquale sit rectangulo Θ K in K M. Inveniendum est igitur tale punctum M,



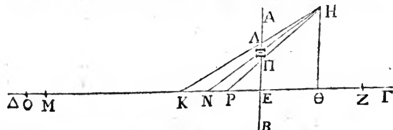
in recta Δ Z, ut, sectâ rectâ Θ M bifariam in puncto K, rectangulum Z M in Θ E æquale fuerit rectangulo Θ K in K M. Sit itaque Z M in Θ E æquale rectangulo Θ K in K M; ac Z M erit ad M K sicut K Θ ad Θ E; dividendo autem Z K erit ad K M ut K E ad Θ E. Cum autem recta Θ K æqualis est ipsi K M, erit Z K ad K Θ sicut K E ad E Θ. Differentia vero antecedentium est ad differentiam consequentium in eadem ratione; adeoque Z E erit ad E K sicut E K ad E Θ: quare recta E K media proportionalis est inter ipsas Z E, E Θ. Ambæ vero rectæ Z E, E Θ dantur, recta igitur E K datur magnitudine & positione. Dato autem puncto Θ, recta quoque Θ K datur, cui æqualis est recta K M; adeoque K M datur magnitudine

tudine & positione. Sed datur punctum K, punctum M ergo datum est. Est autem punctum M punctum quæsitum.

Componetur autem propositio hunc in modum. Manentibus descriptis ac ductâ rectâ parallelâ; capiatur E K media proportionalis inter ipsas Z E, E Θ; ac fiat recta K M ipsi K Θ æqualis: & jungatur ipsa K H. Dico quod rectangulum Z M in E Θ æquale erit rectangulo Θ K in K M, quodque ratio E Λ ad Z K erit ut Θ H ad Z M. Quoniam enim Z E est ad E K ut E K ad E Θ, ac summa antecedentium est ad summam consequentium in eadem ratione; erit Z K ad K Θ ut E K ad E Θ. Sed K Θ æqualis est rectæ K M; ergo Z K erit ad K M ut K E ad E Θ. Componendo autem Z M erit ad M K ut K Θ ad Θ E. Quare rectangulum Z M in Θ E æquale erit rectangulo M K in K Θ. Quinetiam cum Z M sit ad M K sicut K Θ *ad* Θ E, *per conversionem rationis, erit* Z M *ad* Z K *ut* K Θ ad K E, sive ut Θ H ad E Λ; quare permutando, Θ H erit ad Z M ut E Λ ad Z K. Quapropter rite construitur, si inveniatur media proportionalis inter Z E & E Θ, puta recta E K, ac jungatur ipsa H Λ K.

Jam inquirendum est an recta H K auferat rationem E Λ ad Z K, minorem vel majorem quâvis aliâ rectâ per punctum H ducendâ, quæ ipsis Z Δ, E A occurrat.

Hoc autem determinatur in hunc modum. Manentibus quæ prius, ductâque rectâ parallelâ; sit E K media propor-



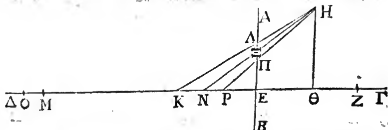
tionalis inter Z E & E Θ, ac jungatur H K. Oportet inquirere an recta H K auferat rationem E Λ ad Z K, majorem vel minorem quavis aliâ rectâ, quæ per H ducta secet ipsas Z Δ, E A. Fiat recta K M æqualis ipsi K Θ, ac rectangulum Z M in E Θ æquale erit rectangulo Θ K in K M; & ratio E Λ ad Z K æqualis rationi Θ H ad Z M. Ducatur jam recta alia ut H N; & comparanda venit ratio E Λ ad Z K, sive Θ H *ad* Z M, *cum ratione*

tione E Ξ *ad* Z N; *& alternando, conferenda est ratio* Θ H *ad* Ξ E, sive Θ N ad N E, cum ratione M Z ad Z N. Convertendo autem rationem, conferatur ratio Z M ad M N cum ratione Θ N ad Θ E; unde rectangulum Z M in Θ E comparandum est cum rectangulo M N in Θ N. Sed rectangulum Θ K in K M æquale est rectangulo Z M in Θ E; comparandum est itaque rectangulum Θ K in K M cum rectangulo Θ N in N M. Manifestum est autem rectangulum Θ K in K M majus esse rectangulo Θ N in N M; cumque Θ K in K M æquale est ipsi Z M in Θ E, rectangulum Z M in Θ E majus erit rectangulo Θ N in N M: ratio igitur Θ N ad Θ E minor erit ratione Z M ad M N. Per conversionem vero rationis, ratio Θ N ad N E, sive Θ H ad E Ξ, major erit ratione M Z ad Z N; alternando autem ratio Θ H ad Z M major erit ratione E Ξ ad Z N: quare recta H K abscindit rationem majorem quam recta H N. Unde constat, quod præ omnibus rectis quæ duci possint per punctum H, ita ut rectas Z Δ, E A intersecent, recta H K aufert rationem E A ad Z K maximam.

Dico præterea quod rectæ propiores ipsi H K abscindunt rationes majores, quam rectæ quæ remotiores sunt ab eadem. Quoniam enim ratio E A ad Z K, sive Θ H ad Z M, major est ratione E Ξ ad Z N; faciamus ut E Ξ ad Z N ita Θ H ad rectam aliam, nempe ad Z O, quæ proinde major erit quam Z M. Constat autem ex præmissis rectangulum Z O in Θ E æquari rectangulo Θ N in N O. Ducatur jam alia recta ut H P; & oportet comparare rationem E Ξ ad Z N, sive Θ H ad Z O, cum ratione E Π ad Z P. Alternando comparanda est ratio Θ H ad E Π, sive Θ P ad P E, cum ratione O Z ad Z P. Per conversionem autem rationis, conferatur ratio Θ P ad Θ E cum ratione O Z ad O P, ac proinde rectangulum Z O in Θ E cum rectangulo Θ P in P O. Sed rectangulum Z O in Θ E æquale est rectangulo Θ N in N O, adeoque comparandum est rectangulum Θ N in N O cum rectangulo Θ P in P O. Conferatur etiam rectangulum Θ K in K O cum rectangulo Θ N in N O. Est vero rectangulum Θ N in N O æquale rectangulo Θ E in Z O; *quare conferendum est rectangulum* Θ K *in* K O *cum rectangulo* Θ E *in* Z O. Constat autem rectangulum Θ K in K O majus esse rectangulo Θ E in Z O; quia rectangulum O M in K Θ majus est rectangulo O M in E Θ. Rectangulum autem M K in K Θ æquale est rectangulo M Z in

E Θ,

E Θ, ideo totum rectangulum K Θ in K O majus erit toto Z O in Θ E, sive rectangulo Θ N in N O. Unde etiam probatur rectangulum Θ N in N O majus esse rectangulo Θ P in P O; adeoque rectangulum Θ E in Z O majus erit rectangulo Θ P in P O: quare ratio Θ P ad Θ E minor erit ratione Z O ad P O. Con-

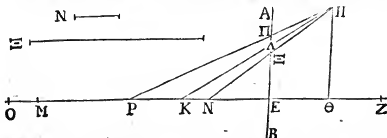


vertendo autem rationem, ratio Θ P ad P E, sive Θ H ad E Π, major erit ratione Z O ad Z P. Alternando vero ratio Θ H ad Z O, sive E Ξ ad Z N, major erit ratione E Π ad Z P. Quapropter recta H N aufert rationem majorem quam H P. Adeoque rectæ propiores ipsi K H abscindunt majores rationes, quam quæ longius distant ab eâdem.

Componetur autem problema modo sequente. Manentibus quæ prius, ductâque rectâ parallelâ, capiatur media proportionalis inter rectas E Z, E Θ, quæ sit E K; & jungatur H K. Hæc recta H K abscindet rationem E Λ ad Z K, majorem quam quælibet alia recta per punctum H ducenda, ita ut rectis Z Δ, E A occurrat. Ratio autem ad construendum proposita, vel erit ratio E Λ ad Z K, vel major erit ea, vel minor: ac si æqualis fuerit rationi E Λ ad Z K, tum recta H Λ K satisfacit problemati. Quod si major fuerit ratio quam E Λ ad Z K, problema impossibile est; quia ratio proposita major est maximâ. Sin ratio data N ad Ξ minor fuerit quam E Λ ad Z K; fiat recta K M æqualis ipsi Θ K; ac rectangulum Z M in Θ E æquale erit rectangulo Θ K in K M, & E Λ erit ad Z K ut Θ H ad Z M. Faciamus jam ut N ad Ξ ita Θ H ad rectam aliam majorem ipsâ Z M, ut ad Z O: cumque rectangulum Θ K in O M majus est rectangulo Θ E in O M, ac rectangulum Θ K in K M æquale est rectangulo Θ E in Z M; totum rectangulum Θ K in K O majus erit rectangulo Θ E in Z O. Adeoque possibile est applicari rectangulum Θ E in Z O deficiens quadrato ad rectam Θ O, duobus quidem modis; ad utramque

 scilicet

ſcilicet partem puncti K. Quo facto habebuntur puncta quæſita N, P: junctiſque HN, HP, dico utramque ductam HN, HP ſatisfacere problemati; ſive quod EΞ eſt ad ZN ut N ad Ξ; vel quod EΠ eſt ad ZP in eadem ratione N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum ΘN in NO æquale eſt rectangulo ZO in ΘE, erit ZO ad ON ſicut NΘ ad ΘE; ac per conver-



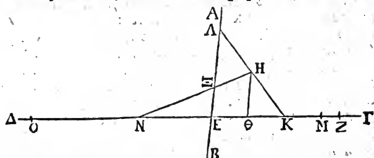
ſionem rationis ZO erit ad ZN ut ΘN ad NE, ſive ΘH ad EΞ: permutando autem erit ΘH ad ZO ſicut EΞ ad ZN. Sed ΘH eſt ad ZO ſicut N ad Ξ; quare EΞ eſt ad ZN ſicut N ad Ξ. Ac ſimili argumento probabitur EΠ eſſe ad ZP in eadem ratione N ad Ξ. Ambæ igitur HN, HP ſatisfaciunt problemati. Manifeſtum autem eſt rectas utrinque propiores ipſi HK abſcindere rationes majores, quam rectæ quæ longius removentur ab eadem.

Ratio autem maxima hunc in modum determinatur. Cum ratio illa maxima ea ſit quæ EΛ ad ZK, ſive ΘH ad ZM; recta autem ZM conſtat ex utriſque ZK, KΘ ſimul ſumptis, (quia MK æqualis eſt ipſi KΘ:) ſed & utræque ZK, KΘ æquales ſunt utriſque ZE, EΘ ac duplo ipſius EK ſimul ſumptis: duplum vero rectæ EK poteſt quater rectangulum ZE, ΘE: erit igitur ratio ΘH ad ZM, vel ſicut ΘH ad rectam compoſitam ex utriſque ZE, ΘE & ex ea quæ poteſt quater rectangulum ΘE ad ZE ſimul ſumptis; vel minor erit eâ.

Exhibuimus itaque compoſitionem problematis juxta omnes caſus qui proponi poſſint; oſtendimuſque an fieri poſſit conſtructio, necne: capiatur enim media proportionalis inter rectas ZE, EΘ; ac ponatur ea ab utraque parte puncti E, ut EK, EN. Ductiſque rectis HK, HN; fiat ipſi ΘK recta KM æqualis: ac ipſi ΘN æqualis ſit recta NO. Erit igitur ratio EΛ ad ZK ratio minima, juxta caſum ſecundum, ſive ut ΘH ad ZM: ratio autem EΞ ad NZ, *ſive* ΘH

ad

ad Z O maxima erit juxta modum quartum. Ac manifestum est quod, juxta modum secundum, ratio Θ H ad Z M major est ratione ejusdem ad Z O. Jam ratio data vel erit ipsa ratio Θ H ad Z M; vel minor erit ratione Θ H ad Z M, ac major quam ratio Θ H ad Z O; *vel major erit ratione* Θ H *ad* Z M; vel erit ipsa ratio Θ H ad Z O; vel minor erit eâdem. At si fuerit ratio ut Θ H ad Z M, efficietur problema tribus modis, nempe primo ac tertio, ac modo singulari juxta casum secundum; non autem omnino juxta modum quartum, quia ratio Θ H ad Z M major est ratione Θ H ad Z O. *Si vero minor fuerit ratione* Θ H *ad* Z M, *major autem quam* Θ H *ad* Z O; *tum componetur dupliciter, modo nempe primo & tertio*; *non*



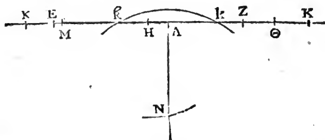
autem modo secundo, quia ratio minor est minimâ; *neque modo quarto, quia major est maximâ.* Si major fuerit ratio quam Θ H ad Z M, tum fieri potest quadrupliciter, nempe modo primo & tertio, & dupliciter juxta secundum; non autem modo quarto, quia ratio data, cum major sit ratione Θ H ad Z M, multo major est ratione Θ H ad Z O. *Si vero æqualis fuerit rationi* Θ H *ad* Z O, *fiet tribus modis, nempe primo & tertio, & modo singulari juxta casum quartum*; *non autem fieri potest juxta casum secundum, quia ratio* Θ H *ad* Z O *minor est quam minima, sive quam* Θ H *ad* Z M. Denique si minor fuerit ratione Θ H ad Z O, erit problema juxta quatuor modos solvendum, primum nempe ac tertium; & dupliciter ad modum quartum: non autem omnino juxta modum secundum, quia ratio proposita minor est minima. Adeoque composuimus problema juxta omnem varietatem ejus.

SCHOLION GENERALE.

Quæret fortaſſe, nec immerito, Lector Geometricus qua lege diſponi debeat recta Z M, *quæ in omni caſu ſumenda eſt ad* Θ H *in ratione propoſitâ: Hoc enim neutiquam oſtenditur ab* Apollonio. *Quoniam vero in unoquoque caſu* E K *eſt ad* K Θ *ſicut* K Z *ad* Z M, (*Notis utor Loci ſeptimi*) *puncta tria* K, Z, M *eodem ordine ſemper collocanda ſunt inter ſe, quo tria illa* E, K, Θ: *adeoque in caſibus ubi punctum* K *ſupponitur inter puncta* E *&* Θ, *punctum* Z *intermedium eſſe debet inter* K *&* M; *ac proinde recta* Z M *ad contrarias partes à puncto* K *ponenda eſt. Si vero* E *vel* Θ *intermedium fuerit, intermedium quoque erit punctum* K *vel* M, *reſpective; quocirca recta* Z M *collocanda erit ad eaſdem partes vel verſus punctum* K. *Quod ſi, juxta præſcriptum hujus Regulæ, ponatur recta* Z M *ad eaſdem partes à puncto* Z, *ad quas jacet punctum* H *à recta* A B, *applicandum erit rectangulum* Θ E *in* Z M *ad rectam* Θ M *excedens quadrato. Si vero ad contrarias partes ponenda ſit* Z M, *applicandum eſt ad ipſam* Θ M *rectangulum* Θ E *in* Z M *deficiens quadrato. Utriuſque autem Applicationis effectionem docet* Euclides *in* 28va *&* 29na Prop. Elem. VI. *quarum ope conſtruxere Veteres problemata omnia plana ad has duas Formulas redacta; nempe ut cognitâ dati rectanguli ſummâ vel differentiâ laterum, invenirentur latera ſigillatim. Ac ſane pro reſoluto habebatur apud eos omne problema, poſtquam ad harum alteram perductum erat: ut vel ex hoc libro & ex* Pappo *videre eſt. Unde ſubeſt mirari hæc duo problemata generaliſſime ab* Euclide *conſtructa, à* Tacquetto, Chaleſio *eorumque Aſſeclis, ut inutilia nulliuſque momenti rejici, nec Commentario digna cenſeri. Etenim ſi, loco parallelogrammi dati, applicetur rectangulum ad rectam datam, quod deficiat vel excedat quadrato, loco figuræ parallelogrammæ ſpecie datæ; (cum Rectangula & Quadrata etiam parallelogramma ſint) res nimis manifeſta eſt quam ut ulteriore indigeat explicatione. Coincidit autem cum vulgatâ Æquationum Quadraticarum (uti nunc loquimur) effectione; quæ quidem commodiſſime fit ad hunc modum. Proponatur applicandum ad rectam* Θ M *rectangulum æquale rectangulo* Θ E *in* Z M *imprimis excedens quadrato. Biſectâ rectâ* Θ M *in medio ad* Λ,

eidem

eidem ΘΜ *normalis sit* ΑΝ; *factisque* ΑΕ, ΑΖ *ipsis* ΘΕ, ΖΜ *æqualibus, bisecetur* ΕΖ *in* Η: *&* *arcus circuli centro* Η *radio* ΗΖ *descripti occurret normali* ΑΝ *in puncto* Ν, *ita ut* ΑΝ *sit media proportionalis inter* ΘΕ *&* ΖΜ. *Dein fiant* ΑΚ, Ακ, *ab utraque parte puncti* Α, *ipsi* ΘΝ *æquales; ac puncta* Κ, κ *erunt puncta quæsita. Si vero applicandum fuerit rectangu-*



lum illud deficiens quadrato; Centro Ν *ac radio* ΑΘ *describatur arcus circularis qui ipsi* ΘΜ *occurret in punctis quæsitis k*, k. *Quod si* ΑΘ *minor fuerit mediâ illâ proportionali* ΑΝ, *ita ut circulus ille non interfecet, nec tangat rectam* ΘΜ, *impossibilis erit constructio. Sed primis Elementis imbutum Lectorem supponimus; nec hujus est loci ea docere.*

Cæterum, ut in Scholiis præcedentibus, Problema modo magis generali tractavimus; relicto scilicet puncto, unde ducantur rectæ rationem auferentes, indeterminato: ita etiam in his quatuor Locis sive Capitulis, invenimus rectas omnes, datam rationem abscindentes, contingere Curvas binas Parabolicas (quas conjugatas appellare licet.) Simulque nobilem, ac, quantum scio, novam Parabolæ proprietatem, describendæ Curvæ aptissimam, patefecimus. Demonstrat enim Apollonius *rationes maximas & minimas esse ut* ΘΗ, *sive recta parallela, ad* $EZ + E\Theta \pm \sqrt{4 EZ \text{ in } E\Theta}$: *adeoque datâ ratione quâvis, ut* m *ad* n, *maximas ac minimas rectas parallelas, quales* ΘΗ, *reperiri, capiendo eas ad* $EZ + E\Theta \pm \sqrt{4 EZ \text{ in } E\Theta}$ *ut* n *ad* m. *Stante autem* ΕΖ, *ac fluente* ΕΘ; *patet*

$\frac{m}{n} \times EZ + E\Theta$ *rectam lineam Curvæ diametrum designare cum* ΕΘ *incipientem. Quadratum autem partis alterius sive* $\frac{m^2}{n^2}$

$\frac{m^2}{n^2} \times 4 EZ \times E\Theta$ *augeri in ratione ipsius* EΘ, *ut Abscissæ* ; *adeoque* $\frac{m}{n} \sqrt{4 EZ}$ *in* EΘ *est ordinatim applicata Curvæ, quam contingunt puncta omnia* H ; *quæ proinde Parabola est : utpote cujus notissima est proprietas, ut quadrata Applicatarum sint in ratione Abscissarum.*

Quocirca Parabolas binas, quas contingunt rectæ omnes à datis rectis datam auferentes rationem, hunc in modum designare licet. Sint rectæ duæ positione datæ AB, ΓΔ *sese interſecantes in puncto* E ; *ac in* ΓΔ *sumatur punctum* Z : *oportet invenire Curvas illas quas contingunt rectæ omnes quovis modo abscindentes rationem* EΛ *ad* ZK *sive* m *ad* n. *Capiatur in recta* EΔ *quodvis punctum* Θ ; *ac per* Θ *&* Z *ducantur ipsi* AB *parallelæ* ΘH, ZN. *Ponatur* EΞ *ipsi* EZ *æqualis, ac fiat* EO = EΠ *ad* EZ = EΞ *ut* m *ad* n ; *ac datis punctis* O *&* Π (*in quibus continget recta* AB *utramque curvam*) *junctisque & productis* ΞO, ΞΠ, *erunt ipsæ utriusque Parabolæ diametri. Occurrat autem diameter* ΞO *parallelis* ΘH, ZN *in punctis* Σ *&* P ; *ac* ΞE *erit ad* EO, *hoc est* n *ad* m, *ut* ΞΘ, *sive* EZ + EΘ, *ad* ΘΣ ; *quæ proinde æquabitur ipsi* $\frac{m}{n} \times EZ + E\Theta$; *ac* ZP *æqualis erit ipsi* $\frac{m}{n} \times 2 EZ$: *adeoque ejus quadratum* $\frac{m^2}{n^2} \times 4 EZ \times EZ$. *Ob Parabolam autem erit, ut* OP *ad* OΣ, *hoc est* EZ *ad* EΘ, *ita quadratum ex* ZP *vel* PN, *ad quadratum ex* ΣM *vel* ΣH ; *quod proinde habebitur* $\frac{m^2}{n^2} \times 4 EZ$ *in* EΘ : *ejusque latus* $\frac{m}{n} \sqrt{4 EZ \times E\Theta}$ *erit ipsa* ΣM *vel* ΣH. *Quapropter differentia ipsarum* ΘΣ, ΣM, *sive* ΘM, *erit ad* $EZ + E\Theta - \sqrt{4 EZ \times E\Theta}$ *ut* m *ad* n ; *earundemque summa, sive* ΘH, *erit ad* $EZ + E\Theta + \sqrt{4 EZ \times E\Theta}$ *etiam ut* m *ad* n. *Est igitur ratio* m *ad* n, *sive* EΛ *ad* ZK, *extrema illa quæ auferri potest à rectis per puncta* H, M *ducendis : quemadmodum ex determinationibus* Apollonii *manifestum est. Parabolæ autem describendæ Latus rectum habebitur capiendo illud ad* PZ *ut* PZ *ad* PO ; *unde Curvam ipsam per puncta ducere pronum est. Altera autem Parabola*

eaſdem

easdem omnino habet ordinatim applicatas cum priore, ad eandem distantiam rectæ parallelæ HΘ, *à communi Tangente* AB.

Descriptis autem Curvis; dico omnes rectas easdem contingentes abscindere rationem æqualem rationi EO *ad* ZE, *juxta omnes modos quibus fieri potest; ubicunque fuerit punctum datum* H, *è quo educendæ sunt rectæ. Nam si proponatur illud supra Vertices Parabolarum, sive à recta* AB *versus* Γ; *semper duci possunt quatuor Tangentes ad modum quatuor casuum Loci quarti. Si fuerit punctum* H *in recta* ZN, *habebuntur casus tres Loci quinti; ac patet quod in casu tertio impossibile sit Tangentem ducere, nisi* ZH *excesserit ipsam* ZN, *vel major fuerit quam quater* EO. *Si fuerit punctum* H *infra rectam* NZT, *versus* Δ; *Tangentes designabunt omnes rectas juxta quatuor Casus Loci sexti ducendas. Quod si fuerit* H *intra datas parallelas* AB, NT; *habebimus omnes Casus Loci septimi; eâ ubique lege, ut si punctum reperiatur intra ambitum alterutrius Curvæ, duobus tantum modis pos-*

sibile

ſibile ſit Tangentes ducere; nempe quæ tangant alteram. Si tangat punctum H *ipſas Curvas, tribus tantum modis fiet. Si vero extra Curvarum ambitus inveniatur punctum, tum quatuor modis duci poſſunt Tangentes: duobus nempe juxta Caſus primos & tertios Locorum ſexti & ſeptimi; ac duobus, juxta caſus ſecundos eorundem Locorum, quoties collocatur punctum in ſpatiis inter utramque Parabolam intermediis: vel etiam duobus, juxta Caſus quartos eorundem, ſi in ſpatiis externis & infinitis* ΑΟΝ, ΒΠΤ *punctum* Η *inveniatur: quæ omnia coincidunt cum iis quæ in caſubus determinatis tradit* Apollonius.

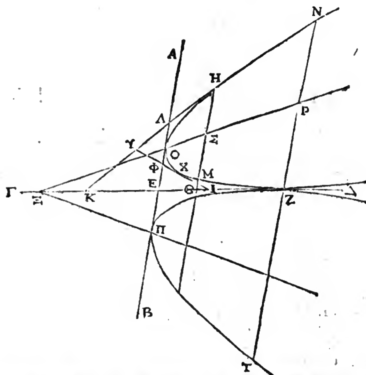
Caveat tamen Lector ne credat has Parabolas, quaſi ad compoſitionem requiſitas, deſcribi oportere. Haud enim Geometræ Curvas Conicas ad effectionem Planorum Problematum (quale eſt hoc) adhibere convenit. At vero ad plenam ſolutionem, Locum, *ut vocant, ſeu puncta omnia rem propoſitam præſtantia exhiberi petunt hodierni Artifices; in quorum gratiam præcedentia ſubjunximus.*

Occaſione autem hujus Loci *deſignandi, incidi in Propoſitionem perpulchram, quæque nova mihi viſa eſt.* viz. *Si tres rectæ contingant Parabolam, ut* ΗΚ, ΚΖ, ΕΛ; *ac datum ſit in altera punctum contactûs ut* Ζ; *dantur etiam in reliquis puncta contactûs. Nam* ΖΚ *eſt ad* ΕΛ *ut* ΕΖ *ad* ΕΟ; *ac* ΕΖ *eſt ad* ΚΛ *ut* ΚΕ *ad* ΛΗ: *quia Tangentes Parabolæ auferunt ſemper ſegmenta in datâ ratione. Datis etiam quatuor Tangentibus abſque puncto, dantur etiam in omnibus puncta contactuum. Ducatur enim Tangens quarta, ut* ΙΧΦΥ, *occurrens ipſi* ΑΒ *in* Φ, *ac Curvam contingens in* Χ. *Dico quod* ΛΥ *erit ad* ΕΙ *ut* ΛΚ *ad* ΕΖ, *ac in eâdem erit ratione* ΚΕ *ad* ΛΗ; *data ergo ſunt puncta* Ζ *&* Η. *Pariter* ΚΥ : ΚΛ :: ΕΦ : ΕΟ *&* ΚΛ : ΚΥ :: ΙΦ : ΙΧ. *Vel etiam* ΕΚ : ΚΙ :: ΦΥ : ΥΧ, *ac* ΚΙ : ΕΚ :: ΛΦ *ad* ΛΟ. *Quæ omnia manifeſta ſunt, ex eo, quod rectas quatuor Parabolam contingentes, ita ſeſe interſecare neceſſe ſit, ut quælibet Tangens ſimiliter diviſa ſit, (ſive in partes proportionales) ad puncta interſectionum & contactuum.*

Datis autem quatuor Tangentibus, Curva ipſas contingens ſtatim, abſque omni præparatione, deſcribi poteſt. Diviſâ enim utraque rectâ ΕΙ, ΥΛ *in partes quotlibet numero æquales, continuanda eſt ſimilium partium diſpunctio utrinque*

S in

in infinitum; partium scilicet ipsius EI *versus* K & Z: *partium vero ipsius* ΛΥ *versus* H & K. *Deinde jungendo omnia ordine puncta ad contrarias partes sumpta, nempe puncta in* KΥ *cum punctis in* IZ; *illa vero in* ΛH *cum correspondentibus in* EK; *habebimus Curvæ Tangentes quotlibet. Ad has*



vero manifestum est, si parum distent Tangentium intersectiones inter se, tutius duci posse Curvam quæsitam, quam per puncta methodo operosiori invenienda, ut expertus fateberis. Eodemque omnino modo describenda est Parabola, datis tribus Tangentibus & puncto contactûs in aliquâ earum. Sed ad Apollonium *redeamus.*

APOLLONII PERGÆI

De Sectione rationis,

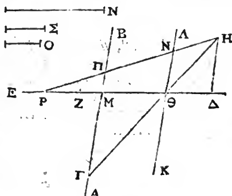
SIVE

ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ,

LIBER POSTERIOR.

SINT duæ rectæ positione datæ ut AB, ΔE, sese intersecantes in puncto M; sumatur autem in recta AB punctum Γ, & in recta ΔE punctum Z. Sit vero imprimis punctum datum H intra angulum ΔMB. Ac duci possunt rectæ per punctum H, ita ut segmenta in ratione datâ resectæ sint juxta quinque modos: vel enim abscindentur à rectis ΓB, ZE; vel à rectis ΓB, ZM; vel à rectis ZΔ, ΓA; vel â rectis ZΔ, ΓM; vel denique à rectis ΔZ, ΓB.

Cas. I. Ducatur jam juxta modum primum recta HP auferens ab ipsis ΓB, ZE rationem ΓΠ ad ZP æqualem rationi datæ: jungatur recta HΓ. Quoniam vero punctum Γ datur, atque etiam punctum H, erit recta ΓH positione data; datâ autem positione rectâ EZ, datum erit punctum *occursus* Θ. Per punctum Θ agatur recta KΛ ipsi AB parallela. Cum autem recta illa per punctum datum Θ ducatur, rectæque datæ AB parallela sit, ipsa KΛ



 positione

positione data est: dantur autem rectæ Γ H, Θ H, ob data puncta Γ, Θ, H; adeoque ratio Γ H ad H Θ, hoc est ratio Γ Π ad Θ N, etiam datur. Sed ratio Γ Π ad Z P data est, adeoque ratio Θ N ad Z P habetur. Jam rectæ duæ K Λ, Δ E *positione* dantur, ac in recta K Λ notatur punctum Θ, in ipsâ vero Δ E punctum Z; datum autem punctum H est intra angulum Δ Θ Λ. Ducenda est igitur recta ut H P, quæ auferat ab ipsis rationem datam Θ N ad Z P. Datur autem recta H P, datâ ratione illâ; per ea quæ demonstravimus in libro primo, Loco quarto & Casu primo. Hoc est quod voluimus ostendere in hoc Casu.

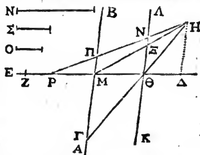
Componetur autem problema in hunc modum. Sit ratio data sicut N ad O: ac fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Σ. Dantur autem duæ rectæ in eodem plano, nempe K Λ, Δ E; & in recta K Λ sumitur punctum Θ, in recta vero Δ E punctum Z: ac datum est punctum H intra angulum Δ Θ Λ. Ducatur igitur recta H Π P, juxta modum descriptum in casu primo loci quarti, quæ auferat rationem Θ N ad Z P, sicut Σ ad O. Dico quod hæc recta H Π P solvit problema. Quoniam enim H Γ est ad H Θ ut Γ Π ad Θ N; ac N est ad Σ ut H Γ ad H Θ: erit Γ Π ad Θ N sicut N ad Σ. Est autem Θ N ad Z P sicut Σ ad O; adeoque ex æquo Γ Π erit ad Z P sicut N ad O: ac proinde recta H P solvit problema, eaque sola. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur jam, juxta casum secundum, recta H P auferens à rectis Z M, Γ B rationem Γ Π ad Z P æqualem rationi datæ. Jungatur recta Γ H *occurrens ipsi* Δ E *in puncto* Θ; *ac per datum punctum* Θ *duc rectam* K Λ *ipsi* A B *parallelam, quæ proinde positione data est.* Datis autem punctis Γ, Θ, H dabitur recta utraque Γ H, H Θ; adeoque ratio earundem datur. Quoniam vero Γ Π est ad Θ N ut Γ H ad H Θ, ratio quoque Γ Π ad Θ N data est. Sed & ratio Γ Π ad Z P datur; ratio igitur Θ N ad Z P data est. Datis autem positione duabus rectis in eodem plano, nempe K Λ, Δ E; in recta K Λ sumitur punctum Θ, in recta vero Δ E punctum Z: datum autem punctum H cadit intra angulum Δ Θ Λ. Ducenda est igitur recta H P, quæ data erit per ea quæ demonstravimus in libro primo, ad Loci quarti Casum secundum.

Ad compositionem autem requiritur, ut ratio data major sit ratione Γ M ad M Z. Etenim cum recta Γ Π major sit quam Γ M, ac Z P minor quam Z M; erit ratio Γ Π ad Γ M major ratione

 tione

tione ZP ad ZM; ac permutando erit ratio ΓΠ ad ZP major ratione ΓM ad MZ. Oportet igitur rationem datam majorem esse ratione ΓM ad MZ. Construetur autem problema ad hunc modum. Manentibus prius descriptis; sit ratio data sicut N ad O, quæ major sit ratione ΓM ad MZ. Jungantur HΓ, HM, ac fiat ut HΓ ad ΘH ita N ad Σ. Quoniam autem HΓ est ad ΘH ut N ad Σ, & ΓM est ad ΘΞ ut HΓ ad ΘH, erit ΓM ad ΘΞ sicut N ad Σ. Sed ratio N ad O major est ratione ΓM ad MZ: quare ex æquo ratio Σ ad O major erit ratione ΘΞ ad MZ. Igitur si velimus ducere rectam per punctum H, juxta casum secundum Loci quarti, quæ auferat à rectis KΛ, ΘZ rationem æqualem rationi Σ ad O; occurret illa rectæ ZM, hoc est, cadet ultra punctum M. Nam si propior fuerit puncto Θ, abscinderetur ratio minor. Fiet autem compositio ut in Casu secundo Loci quarti. Ac rectâ HP auferente rationem ΘN ad PZ æqualem rationi Σ ad O; dico quod ipsa HP satisfaciet problemati. Quoniam enim ΓH est ad HΘ in ratione N ad Σ, *ac* ΓΠ *est ad* ΘN ut ΓH est ad HΘ, *erit etiam* ΓΠ *ad* ΘN sicut N ad Σ. Sed ΘN est ad PZ sicut Σ ad O: quare ex æquo ΓΠ erit ad PZ in ratione N ad O. Quapropter recta HP solvit problema, eaque sola. Q. E. D.



Cas. III. Ducatur jam, juxta modum tertium, recta HP auferens à rectis ΓA, ZΔ rationem ΓP ad ZN æqualem rationi datæ; & jungatur ΓH. Datis punctis Γ & H datur etiam recta ΓH. Sed recta ΔE positione datur, ergo datum est punctum Θ. Per punctum Θ ducatur recta parallela ipsi AB, ut KΛ; igitur recta KΛ positione datur. Datis autem rectâ KΛ, punctisque Γ, H, Θ; utraque recta ΓH, HΘ datur, earundemque ratio. Sed ut ΓH est ad HΘ, ita ΓP ad ΠΘ; ratio itaque ΓP ad ΠΘ datur: ratio autem ΓP ad ZN datur, adeoque ratio ΠΘ ad ZN data est. Jam sunt duæ rectæ lineæ in eodem plano, nempe KΛ, ΔE; ac notatur recta KΛ puncto Θ, recta vero ΔE puncto Z: punctum autem H, unde ducenda est recta secans, cadit intra angulum ΔΘΛ. Ducenda est igitur

recta

recta H Π auferens rationem Π Θ ad N Z. At data erit recta H Π P, juxta ea quæ demonstrantur in Libro primo, Loco quarto ac Casu tertio. Q. E. I.

Sic autem componetur problema. Sit ratio data sicut N ad O; ac manentibus descriptis, fiat ut H Γ ad H Θ ita N ad Σ. Cumque K Λ, Δ E sint duæ rectæ in eodem plano positione datæ; ac in rectâ K Λ sumatur punctum Θ, in rectâ vero Δ E punctum Z; ac sit punctum datum H intra angulum Δ Θ Λ: ducatur igitur recta H Π, juxta Casum tertium Loci quarti, quæ auferat rationem Θ Π ad Z N æqualem rationi Σ ad O; ac producatur eadem ad P. Dico quod recta H P satisfacit problemati. Etenim Γ H est ad H Θ sicut N ad Σ; atque adeo Γ P est ad Θ Π ut N ad Σ. Sed Θ Π est ad Z N sicut Σ ad O: quare ex æquo erit Γ P ad Z N sicut N ad O. Recta igitur H P solvit problema, eaque sola. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur jam recta H P, juxta Casum quartum, auferens à rectis Γ M, Z Δ segmenta Γ P, Z N in ratione datâ. Junge Γ H, & cum puncta Γ & H dentur, data erit recta H Γ; ac datâ rectâ Δ E, est etiam punctum Θ datum. Per punctum Θ agatur recta K Λ ipsi A B parallela, ac recta K Λ datur *positione*. Quoniam autem puncta Γ, H, Θ data sunt, rectæ duæ Γ H, Θ H etiam dantur; unde ratio Γ H ad H Θ data est. Sed ut Γ H ad H Θ ita Γ P ad Θ Π, ratio itaque Γ P ad Θ Π datur. Datâ autem ratione Γ P ad Z N, dabitur quoque ratio Θ Π ad Z N. Jam duæ rectæ K Λ, Δ E dantur positione in eodem plano, ac recta K Λ notatur in puncto Θ; recta vero Δ E in puncto Z: punctum autem datum est punctum H, intra angulum Λ Θ Δ. Ducenda est igitur recta ut H P, quæ auferat rationem Θ Π ad Z N. Datur autem recta H P per ea quæ demonstrantur in Libri primi Loco quarto ac Casu secundo. Necesse est autem ad Constructionem ut ratio proposita minor

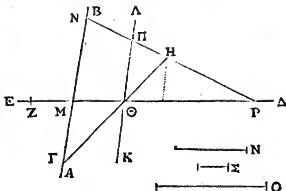
nor sit ratione Γ M ad M Z. Quoniam enim recta M Γ major est quam Γ P, ac M Z minor quam Z N, erit ratio M Γ ad Γ P major ratione M Z ad Z N; quare permutando, ratio M Γ ad M Z major erit ratione Γ P ad Z N. Sed ratio Γ P ad Z N est ratio data; oportet igitur rationem, ad construendum propositam, minorem esse ratione Γ M ad M Z.

Componetur problema hunc in modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut N ad O, quæ sit minor ratione Γ M ad M Z. Jungatur H M, ac fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Σ. Quoniam autem ut Γ H ad H Θ ita Γ M ad Θ Ξ; ac Γ H ad H Θ est ut N ad Σ: Γ M igitur erit ad Θ Ξ sicut N ad Σ. Sed ratio Γ M ad M Z major est ratione N ad O: quare collatis consequentibus erit ratio Θ Ξ ad M Z major ratione Σ ad O. Recta igitur ducta per punctum H, quæ auferat à rectis Θ Λ, Z Θ rationem æqualem rationi Σ ad O, occurret rectæ Θ M. Expositis enim duabus rectis K Λ, Δ E, sumitur in K Λ punctum Θ; in recta vero Δ E punctum Z. Punctum autem datum H est intra angulum Δ Θ Λ: quare, si ducatur, per Casum secundum Loci quarti, recta H M, quæ auferat rationem Θ Ξ ad M Z majorem ratione Σ ad O; ac deinde proponatur aliam ducere, ut recta H N, quæ auferat rationem æqualem rationi Σ ad O; cadet illa citra punctum M, *sive inter puncta* Θ *&* M: quia juxta præscriptum Casûs illius rectæ propiores puncto Θ auferunt rationes minores quam quæ sunt remotiores ab eodem. Productâ autem rectâ H N *ad* P, dico quod H P solvit problema. Etenim ut Γ H est ad H Θ ita Γ P ad Θ Π; *adeoque* Γ P *est ad* Θ Π *sicut* N *ad* Σ. *Sed* Θ Π *est* ad Z N sicut Σ ad O: igitur ex æquo Γ P erit ad Z N sicut N ad O. Quare recta H P satisfacit problemati. Q. E. D.

Cas. V. Ducatur juxta Casum quintum recta P N, auferens ab ipsis Z Δ, Γ B rationem Γ N ad Z P æqualem rationi datæ. Junge

Junge ΓH, ac datis punctis Γ & H recta ΓH datur. Cumque recta ΔE positione datur, etiam punctum Θ datur. Ductâ dein per punctum Θ rectâ ipsi AB parallelâ ut KΛ, ipsius KΛ positio data erit. Quoniam autem puncta Γ, H, Θ dantur, rectæ etiam HΓ, HΘ habentur atque ratio earundem. Ut autem ΓH ad HΘ ita ΓN ad ΘΠ; quare ratio ΓN ad ΘΠ datur. Sed & ratio ΓN ad ZP datur, adeoque ratio ΘΠ ad ZP data est. Jam rectæ duæ KΛ, ΔE dantur positione, ac sumitur in recta KΛ punctum Θ, in recta autem ΔE punctum Z; punctum vero datum H est intra angulum ΔΘΛ: ducenda est igitur recta ut ΠP, auferens à rectis illis rationem ΘΠ ad ZP. Positione autem datur recta PΠ, per demonstrata in Libri primi Loco quarto ac Casu quarto. Quod erat inveniendum.

Construetur autem problema hunc in modum. Sit ratio data sicut N ad O; ac manentibus descriptis, fiat ut HΓ ad HΘ ita N ad Σ. Datis autem positione in eodem plano duabus rectis KΛ, ΔE; in ipsa KΛ sumitur punctum Θ, in recta vero ΔE punctum Z. Punctum autem datum H est intra angulum ΔΘΛ, & ratio auferenda est ut Σ ad O. Ducatur igitur, juxta Casum quartum Loci quarti, recta ΠP, quæ auferat segmenta ΘΠ ad ZP, rationem habentia æqualem rationi Σ ad O: datur itaque recta ΠP, quæ producatur ad N. Dico quod recta PΠN solvit problema. Etenim ut HΓ ad HΘ ita ΓN ad ΘΠ. Sed HΓ est ad HΘ sicut N ad Σ; quare ΓN est ad ΘΠ ut N ad Σ. Est autem ΘΠ ad ZP sicut Σ ad O: quare ex æquo erit ΓN ad PZ sicut N ad O. Q. E. D.



LOCUS

LOCUS SECUNDUS.

Sint jam duæ rectæ infinitæ positione datæ, *ut* A B, Δ E, *sese intersecantes in puncto* M, ac sumatur in recta A B punctum Γ, in recta vero Δ E punctum Z. Sitque datum punctum H intra angulum E M B. Cadat autem imprimis recta, per punctum H ducta ipsi A B parallela, super ipsum punctum datum Z. Ac rectæ per punctum H ductæ habebunt quatuor Casus. Vel enim segmenta abscissa erunt à rectis Γ B, Z E; vel à rectis Γ A, Z Δ; vel à rectis Γ M, M Z; vel denique ab ipsis Γ B, Z Δ.

Cas. I. Cadat autem imprimis, juxta Casum primum, recta N H P, secans a rectis Γ B, Z E rationem Γ N ad Z P æqualem rationi datæ. Junge Γ H; ac datis punctis Γ & H, ac rectâ Z E positione datâ, ipsa Γ H ac punctum Θ dabuntur. Ductâque per punctum Θ rectâ ipsi A B parallelâ, ut K Λ, ipsa quoque K Λ positione datur. Dantur autem utræque Γ H, Θ H, atque adeo earundem ratio datur. Ut autem Γ H est ad H Θ ita Γ N ad Θ Π, quare ratio Γ N ad Θ Π data est. Datâ autem ratione Γ N ad Z P, ratio quoque Θ Π ad Z P datur. Jam vero rectæ duæ in eodem plano positione dantur, nempe K Λ, Δ E; ac sumitur in recta K Λ punctum Θ, in ipsâ vero Δ E punctum Z. Datum vero punctum H ponitur intra angulum E Θ Λ; cadit

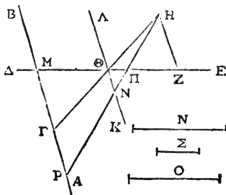
etiam recta per punctum H ducta ipsi A B parallela, super punctum Z. Ducenda est igitur recta H P, quæ auferat rationem rationi Θ Π ad Z P æqualem. Recta autem P H N positione datur, per demonstrata in Libro primo, ad Casum primum Loci quinti. Q. E. I.

Sic autem componetur problema hoc. Manentibus descriptis ac juxta præscriptum propositionis dispositis; sit ratio data

sicut

ſicut N ad O, ac fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Σ. Dantur autem duæ rectæ in eodem plano, puta K Λ, Δ E, quarum K Λ notatur in puncto Θ, Δ E vero in puncto Z; punctum autem datum H eſt intra angulum E Θ Λ; ratio vero auferenda eſt ut Σ ad O. Ducatur itaque recta Π P, juxta Caſum primum Loci quinti, (quia recta parallela cadit ſuper punctum Z) auferens rationem Θ Π ad Z P æqualem rationi datæ Σ ad O; ac productâ rectâ P H Π *ad* N, dico quod ipſa N H P ſatisfacit problemati. Quoniam enim Γ H eſt ad H Θ ut Γ N ad Θ Π; ac Γ H eſt ad H Θ etiam ut N ad Σ: idcirco Γ N eſt ad Θ Π ut N ad Σ. Sed Θ Π eſt ad P Z ſicut Σ ad O; quare ex æquo erit Γ N ad P Z ſicut N ad O: recta itaque P H N ſolvit problema. Q. E. D.

Caſ. II. Ducatur jam juxta modum ſecundum recta H P, auferens à rectis Γ Λ, Z Δ rationem Γ P ad Z Π æqualem rationi datæ. Junge Γ H, ac cum punctum Θ detur, ducatur per idem Θ recta parallela ipſi A B, ut K Θ Λ: recta itaque K Θ Λ poſitione datur. Datur autem ratio H Γ ad Θ H; cumque Γ P eſt ad Θ N ſicut H Γ ad Θ H, ratio quoque Γ P ad Θ N datur: ſed & ratio Γ P ad Z Π datur; quare ratio Θ N ad Z Π etiam datur. Jam rectæ duæ K Λ, Δ E dantur poſitione; ac ſumitur punctum Θ in recta KΛ, in ipſa vero Δ E punctum Z; ac datum punctum H eſt intra angulum E Θ Λ: recta autem parallela cadit ſuper punctum Z Ducenda eſt igitur recta ut H N, auferens rationem illam Θ N *ad* Z Π à rectis Θ K, Z Δ. Hæc autem recta H Π N poſitione datur, juxta demonſtrata in



Libro primo, ad Caſum ſecundum Loci quinti. Q. E. I.

Hoc autem problema ſic conſtruetur. Maneant jam deſcripta quemadmodum docuimus; ac ſit ratio data ſicut N ad O. Fiatque ut H Γ ad H Θ ita N ad Σ. Sunt autem duæ rectæ datæ in eodem plano, nempe K Λ, Δ E; & habetur in rectâ K Λ punctum Θ, in ipsâ vero Δ E punctum Z; datum

quoque punctum Η est intra angulum ΕΘΛ: recta autem parallela cadit super punctum datum Ζ, ac ratio data ea est quæ Σ ad Ο. Ducatur igitur recta ΗΠΝ, juxta casum secundum Loci quinti, auferens rationem ΘΝ ad ΖΠ æqualem rationi Σ ad Ο, ac producatur ea ad Ρ. Dico quod recta ΗΡ solvit problema. Quoniam enim ΗΓ est ad ΗΘ ut ΓΡ ad ΘΝ; atque etiam ΗΓ est ad ΗΘ ut Ν ad Σ: erit quoque ΓΡ ad ΘΝ sicut Ν ad Σ. Sed ΘΝ est ad ΖΠ in ratione Σ ad Ο: quare ex æquo ΓΡ erit ad ΖΠ sicut Ν ad Ο. Recta igitur ΗΠΡ satisfacit problemati. Q. E. D.

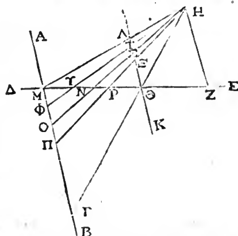
Cas. III. Ducatur juxta Casum tertium recta ΗΡ auferens à rectis ΓΜ, ΖΜ rationem ΓΡ ad ΖΠ æqualem rationi datæ. Junctâ ΗΓ, per punctum Θ ducatur recta ΚΛ ipsi ΑΒ parallela, ac recta ΚΘΛ datur positione. Quoniam vero ΗΓ est ad ΗΘ sicut ΡΓ ad ΘΝ, ratio ΡΓ ad ΘΝ datur; ac *datâ* ratione ΡΓ ad ΖΠ, ratio etiam ΘΝ ad ΖΠ datur. Dantur autem positione duæ rectæ in eodem plano nempe ΚΛ, ΔΕ; & in recta ΚΛ punctum Θ, in ΔΕ vero punctum Ζ datur: datum autem punctum Η est intra angulum ΕΘΛ; ac recta parallela cadit super punctum Ζ. Ducenda est igitur recta ΗΠ, quæ abscindat rationem ΘΝ ad ΖΠ æqualem rationi datæ. Datur autem positione recta ΗΠ, quæ solvet problema, per ea quæ demonstrantur in Libro primo, ad Casum tertium Loci quinti. Q. E. I.

Determinatur autem hunc in modum. Manentibus jam descriptis, recta ΖΘ vel minor erit quam recta ΘΜ, vel major eâ. Sit autem imprimis non minor eâ; ac jungatur ΗΜ. Dico quod recta ΗΜ aufert rationem ΓΜ ad ΜΖ majorem quâvis aliâ ratione, quæ à quibuscunque rectis per punctum Η ductis, rectisque ΓΜ, ΜΘ occurrentibus abscindi possint. Ducatur enim alia recta ut ΗΠΡ. Quoniam vero recta ΖΘ non minor est quam ΘΜ, recta ΗΜ auferet rationem ΘΞ

ad

ad ZM eo majorem quo propior est rectæ abscindenti rationem maximam; adeoque majorem eâ quæ resecatur ab HΠP: juxta demonstrata in Libro primo ad Loci quinti Casum tertium. Ratio igitur ΘΞ ad ZM major est ratione ΘN ad ZΠ, ac permutando ratio ΞΘ ad ΘN major erit ratione MZ ad ZΠ. Cum autem ratio ΞΘ ad ΘN est ut ΓM ad ΓP, ratio ΓM ad ΓP major erit quam MZ ad ZΠ. Permutando itaque ratio ΓM ad MZ major erit ratione ΓP ad ΠZ: quare recta HM aufert rationem ΓM ad MZ majorem quacunque alia ratione, quam abscindere possit recta quævis per punctum H ducta rectisque ΘM, MΓ occurrens. Q. E. D.

Quod si ZΘ minor sit quam recta ΘM; fiat ΘN ipsi ZΘ æqualis: ac junctam HN produc ad O: junge etiam HM. Dico rectam HNO auferre rationem ΓO ad ZN majorem quavis aliâ ratione, à rectâ qualibet per punctum H ducendâ, totique rectæ ΓM occurrente abscissâ: quodque recta HM abscindit rationem ΓM ad MZ minorem quâlibet ratione, à rectâ per punctum H ductâ ipsique OM occurrente, ablatâ. Ducatur enim recta alia ut HΠP occurrens rectæ ΓO. Quoniam autem recta ZΘ æqualis est ipsi ΘN, positione datur recta HNO, auferens rationem ΘΣ ad ZN maximam; per Loci quinti Casum tertium Lib. I. Ratio igitur ΘΣ ad ZN major est ratione ΘΞ ad ZP, ut ibidem demonstratur. Permutando autem ratio ΘΣ ad ΘΞ major erit ratione ZN ad ZP. Sed ratio ΘΣ ad ΘΞ est ut ΓO ad ΓΠ; quare ratio ΓO ad ΓΠ major est ratione ZN ad ZP: ac permutando, *ratio* ΓO *ad* ZN *major erit ratione* ΓΠ *ad* ZP. Ac pari modo probabitur quod, si ducatur recta quævis alia per punctum H, occurrens ipsi OM, recta HNO auferet rationem ΓO ad ZN maximam. Dico præterea quod recta HM aufert rationem ΓM ad MZ minorem quâvis aliâ



 ratione,

ratione, quæ resecari possit à rectâ qualibet per punctum H ductâ, ipsisque O M, M N occurrente. Educatur enim recta alia ipsam O M intersecans, ut H T Υ Φ. Quoniam vero recta H N O abscindit rationem maximam, ac recta H T Υ eidem propior est quam recta H M; ratio Θ Υ ad Z Υ major erit ratione Θ Λ ad Z M: ac permutando ratio Θ Υ ad Θ Λ major erit ratione Z Υ ad Z M. Sed Θ Υ est ad Θ Λ ut Γ Φ ad Γ M; quare ratio Γ Φ ad Γ M major est ratione Z Υ ad Z M, ac permutando ratio Γ Φ ad Z Υ major erit ratione Γ M ad M Z: adeoque ratio Γ M ad M Z minor est ratione Γ Φ ad Z Υ. Recta igitur H N aufert rationem Γ O ad N Z majorem quavis ratione, quæ secari possit à rectis per H ductis, ipsique Γ M occurrentibus: recta vero H M aufert rationem Γ M ad M Z, minorem qualibet aliâ rectâ ipsi O M occurrente. Q. E. D.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, recta Z Θ vel minor erit quam Θ M vel major ea. Sit autem imprimis recta Z Θ non minor quam Θ M. Junge H M, ac recta H M secabit rationem Γ M ad M Z majorem quavis aliâ ratione, à rectâ quâlibet per punctum H ductâ ipsique Γ M occurrente, abscissâ. Jam si ratio ad construendum data fuerit ratio Γ M ad M Z, recta H M *satisfacit problemati. At si major fuerit ratio quam* Γ M ad M Z non componetur problema; quia recta H M aufert rationem Γ M ad M Z maximam. Quod si minor fuerit ratione Γ M ad M Z uno tantum modo construetur. Propositâ autem ratione N ad O minore quam Γ M ad M Z; fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Σ: ac ducatur per punctum Θ recta K Θ Λ ipsi A B parallela. Quoniam autem Γ H est ad H Θ sicut Γ M ad Θ Ξ, atque Γ H est ad H Θ ut N ad Σ, erit etiam Γ M ad Θ Ξ sicut N ad Σ; ac invertendo erit Θ Ξ ad Γ M sicut Σ ad N. Sed ratio Γ M ad M Z major est ratione N ad O; igitur

igitur ex æquo erit ratio ΘΞ ad MZ major ratione Σ ad O. Jam dantur positione rectæ duæ KΛ, ΔE, quarum KΛ notatur in puncto Θ, ΔE vero in puncto Z: cadit autem recta parallela super punctum Z, ac recta ΘZ non est minor quam ΘM; recta vero HM aufert rationem maximam, nempe ΘΞ ad MZ, qua minor est ratio Σ ad O. Ducatur itaque recta per punctum H, juxta Casum tertium Loci quinti, quæ auferat à rectis ΘΛ, ZM rationem rationi Σ ad O æqualem. Quod quidem fieri potest duobus modis; sed una tantum è rectis occurret rectæ ΘM, alterâ ultra punctum M cadente. Sit autem recta illa HNΠ, auferens rationem NΘ ad ZΠ æqualem rationi Σ ad O. Dico quod recta HNΠP solvit problema. Nam ΓH est ad HΘ ut ΓP ad ΘN, ac ΓH est ad HΘ ut N ad Σ; adeoque ΓP est ad ΘN ut N ad Σ. Sed ΘN est ad ZΠ sicut Σ ad O: quare ex æquo ΓP erit ad ZΠ sicut N ad O. Igitur recta HP satisfacit problemati. Q. E. D.

Jam sit recta ZΘ minor quam ΘM. Fiat recta ΘΠ æqualis ipsi ZΘ, ac juncta HΠ producatur ad O. Jungatur etiam HM; ac recta HΠO auferet rationem ΓO ad ZΠ, majorem quâvis ratione à qualibet rectâ per punctum H ductâ ac rectæ ΓM occurrente abscissâ. Recta vero HM abscindet rationem ΓM ad MZ minorem qualibet ratione à rectis per H ductis ipsique MO occurrentibus auferendâ. Recta enim HΠO (per Casum tertium Loci quinti) secat rationem ΘN ad ZΠ majorem ratione ΘΛ ad MZ; ac alternando *erit ratio* ΘN *ad* ΘΛ *major ratione* ZΠ *ad* MZ. Sed ΘN est ad ΘΛ sicut ΓO ad ΓM; quare permutando ratio ΓO ad ZΠ major erit ratione ΓM ad ZM. Recta igitur HO abscindit rationem ΓO ad ZΠ, majorem quavis alia ratione à rectâ ipsi ΓM occurrente abscissâ. Recta vero HM aufert rationem ΓM ad MZ minorem ratione quavis quæ secatur à rectis ipsi OM occurrentibus. Ducatur enim recta HTΥ; cumque ea propior sit rectæ maximam rationem auferenti quam HM, recta HTΥ majorem auferet rationem quam HM; adeoque ratio ΘT ad ZΥ major erit ratione ΘΛ ad MZ, ac permutando *ratio* ΘT *ad* ΘΛ *major erit ratione* ZΥ *ad* MZ. Sed ΘT est ad ΘΛ ut ΓΦ ad ΓM; quare alternando ratio ΓΦ ad ZΥ major est ratione ΓM ad MZ: adeoque recta HM aufert rationem minimam. Igitur si proponatur ratio ad componendum, quæ sit æqualis rationi ΓO ad ZΠ, sola recta HO satisfacit problemati, quia

ratio

ratio eſt maxima. Quâ ſi major ſit ratio, non componetur, quia major eſt maxima. Quod ſi fuerit minor quam ratio Γ O ad Z Π, major vero quam Γ M ad M Z; tum problema duobus modis effici poteſt, nempe ab utrâque parte rectæ H N O. Si vero non fuerit major ratione Γ M ad M Z, tum uno tantum modo componetur, nempe inter O & Γ. Imprimis autem ſit ratio data, ſicut N ad O, minor ratione Γ O ad Z Π, major vero quam Γ M ad M Z: & fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Σ, adeoque Γ O ad N Θ erit ut N ad Σ; ac invertendo erit N Θ ad Γ O ſicut Σ ad N. Sed ratio Γ O ad Π Z major eſt ratione N ad O: quare ex æquo ratio N Θ ad Π Z major erit ratione Σ ad O. Quinetiam cum ratio Γ H ad H Θ ſit ut N ad Σ, atque etiam ut Γ M ad Θ Λ; erit Γ M ad Θ Λ ſicut N ad Σ; ac invertendo Θ Λ ad Γ M ut Σ ad N. Sed ratio Γ M ad M Z minor eſt ratione N ad O: quare ex æquo ratio Θ Λ ad M Z minor erit ratione Σ ad O. Probavimus autem rationem Θ N ad Π Z majorem eſſe ratione Σ ad O; ac recta H Π maximam aufert rationem per demonſtrata in Caſu tertio Loci quinti. Si itaque ducantur, ad modum Caſus tertii Loci quinti, rectæ per punctum H, quæ auferant ab ipſis Θ Λ, Z Δ ſegmenta quæ ſint inter ſe ut Σ ad O, habebuntur duæ rectæ, ab utraque ſcilicet parte ipſius H O; quarum altera ut H Ξ P occurret rectæ Θ Π. Dico quoque alteram rectæ Π M occurſuram. Quoniam enim rectæ propiores ipſi H O ſemper auferunt rationes majores quam rectæ remotiores ab eâdem; ac ratio Σ ad O major eſt ratione Θ Λ ad M Z: recta illa, quæ per punctum H ducta abſcindit rationem Σ ad O, propior erit ipſi

O H

ΘH quam recta HM. Ductâ igitur rectâ HTϒ ac productâ in Φ: dico hanc quoque satisfacere problemati. Nam HΓ est ad HΘ, hoc est ΓΦ ad ΘT, sicut N ad Σ; ac ΘT est ad Zϒ sicut Σ ad O; quare ex æquo erit ΓΦ ad Zϒ sicut N ad O. Recta igitur HTΦ satisfacit problemati; ac manifestum est rectam alteram, sive HΞP, tantundem præstare.

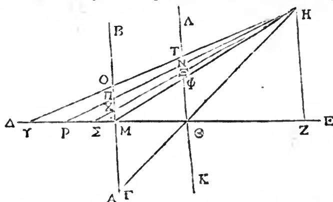
Manentibus autem omnibus jam descriptis; sit ratio N ad O non major ratione ΓM ad MZ: ac fiat ut ΓH ad HΘ ita N ad Σ. Per inquisitionem autem præmissam, constat *rationem* Σ *ad* O majorem non esse ratione ΘΛ ad MZ; atque adeo certe minorem ratione ΘN ad ΠZ. Quoniam vero ratio Σ ad O minor est ratione NΘ ad ZΠ, sive maximâ: ducantur, juxta descripta in Casu tertio Loci quinti, rectæ duæ ab utrâque parte ipsius HNO, auferentes rationem æqualem rationi Σ ad O; quarum altera quidem cadet inter ipsas HΠ, HΓ, altera vero occurret rectæ ΠMΔ. Quoniam autem recta quæ propior est ipsi HΠ semper aufert rationem majorem remotiore: ac ratio Σ ad O, cum jam non sit major quam ratio ΘΛ ad MZ, vel æqualis erit illi vel minor eâ. Si itaque æqualis fuerit, rem præstat recta HM. Quod si minor fuerit ratione ΘΛ ad MZ, cadet recta ultra ipsam HM; adeoque patet quod non satisfacit problemati, quia non occurrit rectæ ΓM. Altera autem recta quæ transit inter ipsas HΓ, HΠO solvit problema. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur jam, juxta Casum quartum, recta HP auferens ab ipsis ΓB, ZΔ rationem ΓΠ ad ZP æqualem rationi datæ. Jungatur HΓ; ac per punctum Θ jam cognitum, ducatur recta ipsi AB parallela, ut KΘΛ; ac recta KΛ positione datur. Cum autem ratio HΓ ad HΘ, sive ΓΠ ad ΘN, data est, *ac ratio* ΓΠ *ad* ZP *datur, ratio quoq;* NΘ *ad* ZP *datur*. Jam dantur positione duæ rectæ KΛ, ΔE; su-

mitur autem in Κ Λ punctum Θ, in ipsâ vero Δ Ε punctum Ζ: punctum autem cognitum Η est intra angulum ΕΘΛ; ac recta parallela cadit super ipsum punctum Ζ. Ducenda est igitur recta ΗΝΡ quæ auferat rationem ΘΝ ad ΡΖ. Recta autem illa ΗΡ positione datur, per demonstrata in Libro primo ad Casum tertium Loci quinti.

Determinatur autem problema hunc in modum. Recta ΖΘ potest esse vel major vel minor quam ΘΜ: imprimis autem non sit major quam ΘΜ. Junge ΗΜ, ac dico quod recta ΗΜ *aufert rationem* ΓΜ ad ΜΖ majorem quavis aliâ rectâ per punctum Η ductâ, ipsique ΔΜ occurrente. Ducatur enim recta alia, ut ΗΝΡ; cumque recta ΖΘ non est longior quam ΘΜ, recta ΗΜ vel auferet rationem ΘΞ ad ΜΖ maximam, vel propior erit rectæ rationem maximam abscindenti quam ista ΗΡ. Quare ratio ΘΞ ad ΜΖ major erit ratione ΘΝ ad ΖΡ, ac permutando ratio ΘΞ ad ΘΝ major erit ratione ΜΖ ΖΡ. Quoniam vero ΘΞ est ad ΘΝ ut ΓΜ est ad ΓΠ, erit ratio ΓΜ ad ΓΠ major ratione ΜΖ ad ΖΡ; ac permutando ratio ΓΜ ad ΜΖ major erit ratione ΓΠ ad ΖΡ. Recta igitur ΗΜ aufert rationem ΓΜ ad ΜΖ, majorem quavis ratione à recta qualibet per punctum Η transeunte, rectæque ΔΜ occurrente abscissâ. Q. E. D.

Manentibus descriptis, jam sit recta ΖΘ major quam ΘΜ, ac fiat recta ΘΡ ipsi ΖΘ æqualis: ac junctâ ΗΡ, dico quod



recta ΗΡ aufert rationem ΓΠ ad ΡΖ majorem quavis ratione, quam abscindit recta quælibet alia per punctum Η ducta, rectæque ΜΔ occurrens. Ducantur rectæ duæ ab utrâque

parte

parte ipsius HP, ut HΣ, HT. Quoniam vero recta ZΘ æqualis est ipsi ΘP, recta HP auferet rationem NΘ ad ZP maximam, juxta Casum tertium Loci quinti. Etenim rectæ KΛ, ΔE dantur positione; ac notatur in recta KΛ punctum Θ, ac in ΔE punctum Z; ac parallela per H ducta cadit super punctum Z: & recta ΘP æqualis est ipsi ZΘ. Ratio igitur NΘ ad ZP major est ratione ΘT ad ZT; ac permutando erit ratio ΘN ad ΘT major ratione ZP ad ZT. Sed NΘ est ad ΘT ut ΓΠ ad ΓO. Quare ratio ΓΠ ad ΓO major est ratione ZP ad ZT, *ac permutando ratio* ΠΓ *ad* ZP *major est ratione* ΓO *ad* ZT. Simili argumento demonstratur rectam alteram HΣ auferre rationem minorem quam recta HP. Recta igitur HP aufert rationem ΓΠ ad ZP, majorem quavis rectâ per H transeunte ipsique MΔ occurrente. Dico præterea rectam HM abscindere rationem ΓM ad MZ, minorem qualibet ratione, à rectâ quavis per H transeunte, ipsique PM soli occurrente, abscissâ. Etenim recta HΣ propior est rectæ maximam rationem auferenti, sive rectæ HP, quam est HM; erit igitur ratio ΘΞ ad ZΣ major ratione ΘΦ ad ZM: ac permutando ratio ΘΞ ad ΘΦ major erit ratione ZΣ ad ZM. Sed ΘΞ est ad ΘΦ ut ΓX ad ΓM, adeoque ratio ΓX ad ΓM major erit ratione ZΣ ad ZM; ac permutando ΓX erit ad ZΣ in majore ratione quam ΓM ad MZ. Recta igitur HM aufert rationem ΓM ad MZ minorem rectâ quâvis per H ductâ ac ipsi PM soli occurrente. Q. E. D.

Sic autem componetur problema hoc. Manentibus descriptis, recta ZΘ potest esse vel major rectâ ΘM, vel minor illâ. Imprimis autem sit ZΘ non major quam ΘM. Junctâ igitur HM, recta HM auferet rationem ΓM ad MZ, majorem qualibet ratione, à rectis per H ductis ipsique ΔM occurrentibus, ablatâ. Ac si fuerit ratio data æqualis rationi ΓM ad MZ, recta HM sola solvit problema, auferendo scilicet rationem illam maximam. Si major fuerit ratio proposita, tum componi non potest problema, quia ratio data major est maximâ. Si vero proponatur ratio minor, tum fieri potest unico tantum modo. Sit jam ratio proposita sicut N ad O minor ratione ΓM ad MZ. Fiat ut ΓH ad HΘ ita N ad Σ: cumque HΓ est ad HΘ sicut ΓM ad ΘΠ, erit etiam ΓM ad ΘΠ sicut N ad Σ, ac invertendo ΘΠ ad ΓM erit ut Σ ad N. Sed ratio ΓM ad MZ major est ratione N ad O; quare ex

æquo erit ratio Σ ad O minor ratione ΘΠ ad MZ, hoc est ratione maximâ. Igitur, juxta Casum tertium Loci quinti, ducantur, ab utraque parte ipsius HM, rectæ duæ auferentes à rectis ZΔ, ΘΠ, rationem æqualem rationi Σ ad O. Sed altera tantum è rectis illis occurret ipsi MΔ, ut recta HP, quæ auferet rationem ΘN ad ZP æqualem rationi Σ ad O. Dico quod recta HP solvit problema. Etenim HΓ est ad HΘ ut N ad Σ; & ΓΞ est ad ΘN ut HΓ ad HΘ: adeoque ΓΞ est ad ΘN sicut N ad Σ. Sed NΘ est PZ sicut Σ ad O. Quare ex æquo ΓΞ erit ad ZP sicut N ad O. Recta igitur HP solvit problema. Altera autem recta non occurret ipsi MΔ, adeoque non solvit problema; quod nullo alio modo construi potest præter dictum. Q. E. D.

Manentibus descriptis; sit recta ZΘ major quam ΘM. Fiat recta ΘP æqualis illi, ac jungantur ipsæ HM, HP. Quoniam recta ZΘ æqualis est ipsi ΘP, recta HP auferet rationem ΓΠ ad PZ, majorem quavis ratione quam abscindere possit recta quælibet per H ducta ipsique MΔ occurrens: ac recta HM auferet rationem ΓM ad MZ, minorem quâvis aliâ rectâ ipsi MP occurrente. Jam si ratio data æqualis fuerit rationi ΓΠ ad PZ, sola recta HP solvit problema. Si vero proponatur ratio major quam ΓΠ ad PZ, tum problema construi non potest; quia ratio data major est maximâ. Quod si proponatur ratio minor quam ΓΠ ad PZ, major vero quam ΓM ad MZ, construetur problema duobus modis; quia duci possunt rectæ duæ ab utroque latere ipsius HP, quæ occurrentes ipsi MΔ satisfacient proposito. Si vero ratio non fuerit major ratione ΓM ad MZ, tum problema unicam tantum sortitur solutionem. Sit jam ratio data sicut N ad O, quæ minor sit ratione ΓΠ ad PZ, major vero quam ratio ΓM ad MZ.

MZ. Fiat ut ΓΗ ad ΗΘ ita Ν ad Σ. Quoniam autem, ut ΓΗ est ad ΗΘ ita ΓΠ ad ΘΝ, erit quoque ΓΠ ad ΘΝ sicut Ν ad Σ; ac invertendo ΘΝ erit ad ΓΠ sicut Σ ad Ν. At ratio ΓΠ ad ΡΖ major est ratione Ν ad Ο; quare ex æquo ratio ΘΝ ad ΡΖ major erit ratione Σ ad Ο. Quinetiam cum ratio ΓΗ ad ΗΘ sit ut ΓΜ ad ΘΞ; ac ΓΗ sit ad ΗΘ ut Ν ad Σ; ideo ΓΜ ad ΘΞ erit ut Ν ad Σ. Sed ΓΜ est ad ΜΖ in ratione minore quam Ν ad Ο; quare invertendo & ex æquo, ΘΞ ad ΜΖ erit in ratione minore quam Σ ad Ο. Ratio igitur Σ ad Ο minor erit ratione ΘΝ ad ΡΖ, ac major ratione ΘΞ ad ΜΖ. Sed ratio ΘΝ ad ΡΖ maxima est, per Casum tertium Loci quinti. Ducantur ergo rectæ duæ per punctum Η, ab utraque parte ipsius ΗΡ, quæ occurrentes ipsi ΔΜ *auferant à rectis* ΘΛ, ΖΔ rationes æquales rationi datæ, sive rationi Σ ad Ο. Sint autem ipsæ rectæ ΗΥ, ΗΣ. Dico harum utramque problema solvere. Quoniam enim ΗΓ est ad ΗΘ sicut Ν ad Σ; ac ΓΤ est ad ΘΛ sicut ΗΓ ad ΗΘ: erit etiam ΓΤ ad ΘΛ sicut Ν ad Σ. Sed ΘΛ est ad ΖΥ sicut Σ ad Ο; quare ex æquo ΓΤ erit ad ΖΥ sicut Ν ad Ο, adeoque recta ΗΥ solvit problema. Ac pari argumento probabitur alteram etiam rectam ΗΣ satisfacere problemati. Quod autem recta ΗΣ non cadat ultra rectam ΗΜ, sic demonstratur. Quoniam ratio Σ ad Ο minor est ratione ΘΝ ad ΡΖ, quæ nempe æqualis est rationi maximæ; (juxta Casum tertium Loci quinti) major vero ratione ΘΞ ad ΜΖ à rectâ ΗΜ abscissâ; rectæ autem, quæ propiores sunt rationem maximam auferenti, majores abscindunt rationes quam remotiores ab

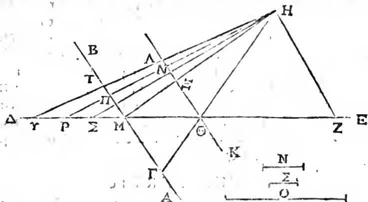
eadem:

æquo erit ratio Σ ad O minor ratione ΘΠ ad MZ, hoc eſt ratione maximâ. Igitur, juxta Caſum tertium Loci quinti, ducantur, ab utraque parte ipſius HM, rectæ duæ auferentes à rectis ZΔ, ΘΠ, rationem æqualem rationi Σ ad O. Sed altera tantum è rectis illis occurret ipſi MΔ, ut recta HP, quæ auferet rationem ΘN ad ZP æqualem rationi Σ ad O. Dico quod recta HP ſolvit problema. Etenim HΓ eſt ad HΘ ut N ad Σ; & ΓΞ eſt ad ΘN ut HΓ ad HΘ: adeoque ΓΞ eſt ad ΘN ſicut N ad Σ. Sed NΘ eſt PZ ſicut Σ ad O. Quare ex æquo ΓΞ erit ad ZP ſicut N ad O. Recta igitur HP ſolvit problema. Altera autem recta non occurret ipſi MΔ, adeoque non ſolvit problema; quod nullo alio modo conſtrui poteſt præter dictum. Q. E. D.

Manentibus deſcriptis; ſit recta ZΘ major quam ΘM. Fiat recta ΘP æqualis illi, ac jungantur ipſæ HM, HP. Quoniam recta ZΘ æqualis eſt ipſi ΘP, recta HP auferet rationem ΓΠ ad PZ, majorem quavis ratione quam abſcindere poſſit recta quælibet per H ducta ipſique MΔ occurrens: ac recta HM auferet rationem ΓM ad MZ, minorem quâvis aliâ rectâ ipſi MP occurrente. Jam ſi ratio data æqualis fuerit rationi ΓΠ ad PZ, ſola recta HP ſolvit problema. Si vero proponatur ratio major quam ΓΠ ad PZ, tum problema conſtrui non poteſt; quia ratio data major eſt maximâ. Quod ſi proponatur ratio minor quam ΓΠ ad PZ, major vero quam ΓM ad MZ, conſtruetur problema duobus modis; quia duci poſſunt rectæ duæ ab utroque latere ipſius HP, quæ occurrentes ipſi MΔ ſatisfacient propoſito. Si vero ratio non fuerit major ratione ΓM ad MZ, tum problema unicam tantum ſortitur ſolutionem. Sit jam ratio data ſicut N ad O, quæ minor ſit ratione ΓΠ ad PZ, major vero quam ratio ΓM ad

MZ.

MZ. Fiat ut ΓH ad HΘ ita N ad Σ. Quoniam autem, ut ΓH est ad HΘ ita ΓΠ ad ΘN, erit quoque ΓΠ ad ΘN sicut N ad Σ; ac invertendo ΘN erit ad ΓΠ sicut Σ ad N. At ratio ΓΠ ad PZ major est ratione N ad O; quare ex æquo ratio ΘN ad PZ major erit ratione Σ ad O. Quinetiam cum ratio ΓH ad HΘ sit ut ΓM ad ΘΞ; ac ΓH sit ad HΘ ut N



ad Σ; ideo ΓM ad ΘΞ erit ut N ad Σ. Sed ΓM est ad MZ in ratione minore quam N ad O; quare invertendo & ex æquo, ΘΞ ad MZ erit in ratione minore quam Σ ad O. Ratio igitur Σ ad O minor erit ratione ΘN ad PZ, ac major ratione ΘΞ ad MZ. Sed ratio ΘN ad PZ maxima est, per Casum tertium Loci quinti. Ducantur ergo rectæ duæ per punctum H, ab utraque parte ipsius HP, quæ occurrentes ipsi ΔM *auferant à rectis* ΘΛ, ZΔ rationes æquales rationi datæ, sive rationi Σ ad O. Sint autem ipsæ rectæ HΥ, HΣ. Dico harum utramque problema solvere. Quoniam enim HΓ est ad HΘ sicut N ad Σ; ac ΓT est ad ΘΛ sicut HΓ ad HΘ: erit etiam ΓT ad ΘΛ sicut N ad Σ. Sed ΘΛ est ad ZΥ sicut Σ ad O; quare ex æquo ΓT erit ad ZΥ sicut N ad O, adeoque recta HΥ solvit problema. Ac pari argumento probabitur alteram etiam rectam HΣ satisfacere problemati. Quod autem recta HΣ non cadat ultra rectam HM, sic demonstratur. Quoniam ratio Σ ad O minor est ratione ΘN ad PZ, quæ nempe æqualis est rationi maximæ; (juxta Casum tertium Loci quinti) major vero ratione ΘΞ ad MZ à rectâ HM abscissâ; rectæ autem, quæ propiores sunt rationem maximam auferenti, majores abscindunt rationes quam remotiores ab

 eadem:

eadem: igitur recta, quæ aufert rationem Σ ad O, occurret rectæ PM. Q. E. D.

Manentibus autem descriptis, sit ratio data, nempe ratio N ad O, jam non major ratione ΓM ad MZ. Manifestum est rationem Σ ad O non esse majorem ratione ΘΞ ad MZ, adeoque minorem esse ratione ΘN ad ZP, sive maximâ. Ducantur igitur, juxta Casum tertium Loci quinti, rectæ duæ, ab utraque parte rectæ HP, quæ abscindere possint rationem æqualem rationi Σ ad O; quarum altera occurret rectæ MΔ, adeoque satisfaciet problemati; ut demonstratur in præmissis: altera vero non solvet problema, quia non occurret rectæ PM, sed rectæ MΘ. Quoniam enim rectæ propiores ipsi HP auferunt rationes majores quam rectæ remotiores ab eadem; ac ratio Σ ad O minor est ratione ΘΞ ad MZ; erit recta illa altera remotior ab ipsa HP quam est recta HM, adeoque ipsi MΘ occurret. Q. E. D.

LOCUS TERTIUS.

Occurrat jam recta, per punctum H ducta ipsique AΓ parallela, rectæ alteri MB citra punctum Z; sive inter illud ac punctum M, ad modum rectæ HK: ac manifestum est rectas duci posse per punctum H, juxta quinque diversos Casus.

Cas. I. Ducatur autem imprimis recta AB, juxta Casum primum, auferens segmenta ΓA ad BZ in ratione data. Junge ΓH; ac per punctum Θ ducatur recta ipsi ΓA parallela, ut recta ΣΘO. Quoniam ratio ΓH ad HΘ datur, ratio ΓA ad ΔΘ data est. *Cumque ratio* ΓA *ad* BZ data est, datur quoque ratio ΔΘ ad ZB. Sunt autem rectæ duæ positione datæ, ΣO, MB; ac sumitur in recta MB punctum Z, in recta autem ΣO punctum Θ; datum autem punctum H est intra angulum OΘB. Ducenda est igitur recta AHB, auferens rationem ΔΘ ad ZB datam. Recta autem AHB positione datur, juxta Casum primum Loci

Loci ſeptimi, neque habet limites. Conſtruetur autem per ea quæ ibidem docentur.

Caſ. II. Ducatur recta A B, juxta Caſum ſecundum, auferens rationem Γ A ad B Z datam. Manentibus autem deſcriptis; cum ratio Γ A ad Δ Θ data eſt, atque etiam ratio Θ Δ ad Z B datur, recta quoque A B dabitur poſitione; per Caſum ſecundum Loci ſeptimi.

Determinatur autem hunc in modum. Capiatur Θ B media proportionalis inter ipſas Z Θ, Θ K; junctâque H B ac productâ ad A, dico quod recta A B aufert rationem Γ A ad B Z, minorem quavis aliâ ratione, quæ reſecari poſſit à rectis per punctum H ductis, ipſique K Z occurrentibus. Ducatur enim alia, ut Δ H N. Cumque recta Θ B media proportionalis eſt inter Z Θ, Θ K; erit ratio Σ Θ ad B Z minor ratione O Θ ad Z N: ac permutando, erit ratio Σ Θ ad Θ O minor ratione B Z ad Z N. Sed Σ Θ eſt ad Θ O ut A Γ ad Γ Δ; adeoque ratio A Γ ad Γ Δ minor erit ratione B Z ad Z N: quare permutando, ratio A Γ ad B Z minor erit ratione Γ Δ ad Z N. Recta igitur A B aufert rationem A Γ ad B Z minorem qualibet ratione, à rectis per H tranſeuntibus rectæque K Z occurentibus, abſciſſâ.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam deſcriptis; ſit Θ B media proportionalis inter rectas Z Θ, Θ K; junctaque H B producatur ad A. Dico quod recta A B auferet rationem Γ A ad B Z, minorem quavis aliâ ratione, quam abſcindere poteſt recta quævis alia per punctum H ducta, ipſique K Z occurrens. Quod ſi ratio ad conſtruendum propoſita æqualis fuerit rationi Γ A ad Z B; tum recta A B ſola ſolvit problema; ſi minor fuerit eâ, compoſitio fieri non poteſt. Si vero major fuerit eâ, componetur duobus

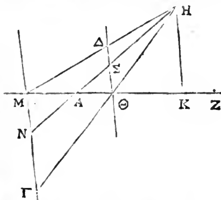
bus modis, ab utrâque parte ipsius A B. Sit autem ratio data sicut N ad T, quæ major sit ratione Γ A ad B Z. Fiat ut Γ H ad H Θ ita N ad Ξ: ac manifestũ est ex æquo, quod ratio Ξ ad T major erit ratione Θ Σ ad B Z. Sed ratio Θ O ad N Z major est eâ; quia Θ B media proportionalis est inter Z Θ & Θ K: unde constat rectas duas duci posse per punctum H, ab utraque parte ipsius A B, quæ secent à rectis Θ Σ, Z K, rationes æquales rationi Ξ ad T. Constat autem ex præmissis rectas hunc in modum ductas solvere problema.

Cas. III. Ducatur jam, juxta Casum tertium, recta auferens rationem Γ E ad A Z datam. Quoniam ratio E Γ ad B Θ datur, ac ratio quoque B Θ ad A Z data est; recta E H positione datur: per Casum tertium Loci septimi, qui quidem non habet limites, adeoque manifesta est compositio.

Cas. IV. Ducatur jam, ad modum quartum, recta H N auferens rationem Γ N ad A Z datam. Quoniam ratio Γ N ad Θ Σ datur, etiam ratio Σ Θ ad A Z data est; unde recta H N positione datur. Reducitur enim ad Casum quartum Loci septimi.

Determinatur autem problema hunc in modum. Manentibus prius descriptis, capiatur media proportionalis inter Z Θ & Θ K. Hæc vel minor erit recta Θ M, vel non minor eâ: ac primo non sit minor eâ. Junge H M, ac dico quod recta

recta HM aufert rationem ΓM ad MZ, majorem quavis ratione, à rectâ qualibet per punctum H ductâ ipsique ΓM occurrente, abscissâ. Ducatur enim alia ut HN. Quoniam media proportionalis inter ZΘ, ΘK non est minor quam ΘM; recta HM vel auferet rationem ΘΔ ad ZM maximam, vel propior erit rectæ rationem maximam auferenti: adeoque ratio ΔΘ ad ZM major erit ratione ΘΣ ad AZ; *permutando autem* ΔΘ *ad* ΘΣ *major erit ratione* ZM *ad* AZ. Sed ΔΘ est ad ΘΣ ut est MΓ ad ΓN; quare ratio MΓ ad ΓN major erit ratione MZ ad AZ: ac permutando iterum, ratio MΓ ad MZ major erit ratione ΓN ad AZ. Recta igitur HM aufert rationem ΓM ad MZ, majorem quavis ratione quam aufert recta quælibet alia per punctum H ducta ipsique ΓM occurrens. Q. E. D.



Sit jam media proportionalis inter ZΘ & ΘK minor quam ΘM, ut ΘA. Jungantur HM, HA, ac producatur HA ad Δ. Dico quod recta HΔ aufert rationem ΓΔ ad AZ, majorem quavis alia ratione, quam abscindit recta quælibet per H ducta, totique rectæ ΓM occurrens: quodque recta HM aufert rationem ΓM ad MZ, minorem quâvis aliâ rectâ ipsi ΔM occurrente. Ducantur enim rectæ duæ ut HΠ, HB. Quoniam autem ΘA media proportionalis est inter ZΘ, ΘK, auferet recta HA rationem ΘN ad AZ maximam. Est igitur ratio ΘN ad AZ major ratione ΣΘ ad ZO; & permutando ratio ΘN ad ΣΘ major erit ratione AZ ad ZO. Sed NΘ est ad ΘΣ ut ΔΓ ad ΓB, quæ proinde ratio major est ratione AZ ad ZO: permutando autem ratio ΔΓ ad AZ major erit ratione ΓB ad ZO. Ac pari modo demonstratur rationem illam majorem esse ratione ΓΠ ad PZ. Quapropter recta HΔ aufert rationem ΓΔ ad AZ, majorem omnibus rationibus à rectis per H ductis rectæque ΓM occurrentibus, abscissis. Dico præterea quod recta HM aufert

S

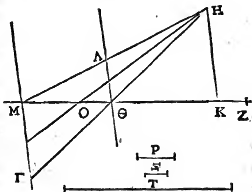
fert rationem Γ M ad M Z, minorem ratione quacunque, à rectâ quâvis *per* H *ductâ*, ipsamque Δ M intersecante, abscissâ.

Quoniam enim recta H Π propior est ipsi H Δ, maximam rationem auferenti, quam est recta H M; ac rectæ quæ propiores sunt illi semper abscindunt rationes majores: igitur ratio Θ E ad P Z major erit ratione Λ Θ ad M Z. Permutando autem ratio E Θ ad Θ Λ major erit ratione P Z ad Z M. Sed E Θ est ad Θ Λ ut Π Γ ad Γ M; ratio igitur Π Γ ad Γ M major erit ratione P Z ad Z M: ac permutando ratio Π Γ ad P Z major erit ratione Γ M ad M Z. Quocirca recta H Δ aufert rationem Γ Δ ad A Z, majorem quavis ratione quam abscindere potest recta aliqua alia per H ducta, ita ut rectis Γ M, Δ M occurrat. Recta vero H M aufert rationem minorem quâvis aliâ rectam Δ M solam intersecante.

Sic autem componetur problema hoc. Maneant jam descripta; ac media proportionalis inter Z Θ, Θ K vel minor erit quam M Θ; vel non erit minor eâ. Imprimis autem non sit minor ea. Junge H M; ac recta H M abscindet rationem Γ M ad M Z, majorem quam recta quævis per H ducta ipsamque Γ M intersecans. Igitur si ratio ad construendum data fuerit æqualis rationi Γ M ad M Z; recta H M eaque sola solvit problema. Si vero ratio minor fuerit, construetur problema unico tantum modo. Quod si ratio data, quæ

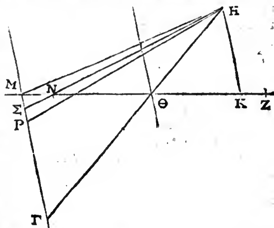
sit

fit ut P ad T, minor fuerit ratione ΓM ad MZ; fiat ut ΓH ad HΘ ita P ad Ξ; ac demonstrari potest ex æquo, quod ratio Ξ ad T minor erit ratione ΛΘ ad MZ: unde patet quod possibile sit per punctum H ducere duas rectas, quæ auferant à rectis ΓM, MZ rationem æqualem rationi Ξ ad T. Hæ si ducantur, cadent ab utraque



parte ipsius HM; ac manifestum est alteram ex his rectis ut HO, quæ per punctum H transit ac producta occurrit ipsi ΓM, solvere problema; *alteram vero non item*: adeoque unico tantum modo efficitur. Q. E. D.

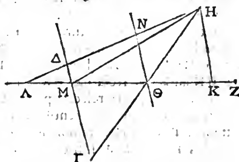
Jam sit media proportionalis inter ZΘ & ΘK minor quam recta ΘM; sit ea ΘN. Junge rectas HM, HN; & producatur HN ad Σ; ac recta hæc HΣ auferet rationem ΓΣ ad NZ, majorem quavis, quæ resecari possit à rectis per punctum H ductis, ipsique ΓM occurrentibus. Recta vero HM auferet rationem ΓM ad MZ, minorem quavis ratione à rectis per H ductis, ipsique ΣM soli occurrentibus, abscissâ. Propositâ autem ratione construendâ, quæ æqualis sit rationi ΓΣ ad NZ; manifestum est quod sola recta HΣ solvet problema. Si ratio proposita major fuerit ea, tum componi non potest. Quod si minor fuerit ratione ΓΣ ad NZ, major



vero quam ΓM ad MZ; hoc in casu dupliciter solvi potest

problema per præcedentia : à rectis scilicet ab utrâque parte ipsius H Σ ducendis, ipsisque Γ Σ, Σ M occurrentibus. Quod si ratio data æqualis fuerit rationi Γ M ad M Z ; constat etiam ex determinatione præmissâ, quod duobus modis solvi possit, nempe rectâ H M, ac rectâ aliâ ut H P. Si vero ratio minor fuerit quam Γ M *ad* M Z ; tum cadet altera è rectis ultra ipsam H M, adeoque non satisfaciet problemati. Manifesta autem sunt hæc omnia ex iis quæ jam pridem demonstravimus.

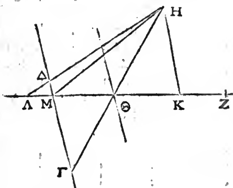
Cas. V. Ducatur jam recta H Λ, juxta Casum quintum, auferens rationem Γ Δ ad Λ Z datam. Quoniam ratio Γ Δ ad Θ N datur, ratio etiam N Θ ad Λ Z datur ; unde recta quoque H Λ positione data est, per demonstrata in Casu quarto *Loci septimi*, qui quidem determinationem habet. Determinatur autem hunc in modum. Quoniam media proportionalis inter Z Θ, Θ K, vel major esse potest quam recta Θ M, vel minor eâ ; primum non sit major eâ. Junge H M, ac manifestum est ex limitationibus præcedentibus, quod recta H M auferet rationem Γ M ad M Z majorem rationibus omnibus, à rectis per punctum H ductis rectæque Λ M occurrentibus, abscissis. Si vero media proportionalis inter Z Θ, Θ K major sit quam recta Θ M ; ut est recta Θ Λ : jungantur H Λ, H M ; ac patet ex limitationibus præcedentibus, quod recta H Λ auferet rationem Γ Δ ad Λ Z, majorem omni ratione, quam auferunt rectæ quævis per H ductæ, ipsique Λ M Θ occurrentes. Recta vero H M auferet rationem Γ M ad M Z, minorem quavis ratione, à rectis per H ductis, solique rectæ Λ M occurrentibus, abscissâ. Q. E. D.



Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, erit media proportionalis inter Z Θ & Θ K, vel major quam Θ M, vel non major ea. Primò autem non sit major eâ. Junge H M auferentem rationem Γ M ad

M Z,

M Z, majorem omni ratione, à rectis per H ductis, ipsique Λ M occurrentibus, abscissâ: ac si fuerit ratio ad componendum data ut Γ M ad M Z, sola recta H M solvit problema. Si major fuerit eâ, tum construi non potest. Quod si ratio minor fuerit eâ, ex præcedentibus constat unam solam rectam duci posse, quæ occurrens ipsi Λ M problemati satisfaciat. Q. E. D.



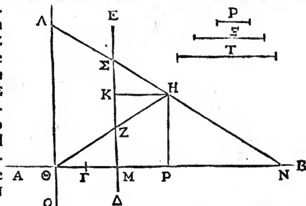
Quod si Θ Λ, media proportionalis inter Z Θ & Θ K, major fuerit quam Θ M; jungantur H M, H Λ; ac recta H Λ auferet rationem Γ Δ ad Λ Z, majorem omni ratione quam abscindunt rectæ aliæ per H ductæ, ipsique Θ M *continuatæ* occurrentes: recta vero H M auferet rationem minimam, nempe rationem Γ M ad M Z. Jam si proponatur ratio ad construendum, quæ fuerit ut Γ Δ ad Λ Z; patet quod recta H Λ sola solvet problema: ac si major fuerit ratio, non construetur. Quod si minor fuerit ratione Γ Δ ad Λ Z, major vero quam Γ M ad M Z, manifestum est ex præmissis, problema effici posse duobus modis; ductis rectis, ab utraque parte ipsius H Λ, rectæ Λ M occurrentibus. Si vero minor fuerit ratione Γ M ad M Z, ex præcedentibus limitationibus constat, unico solum modo solvi posse problema; scilicet rectâ ipsam Λ M intersecante. Denique si ratio æqualis fuerit rationi Γ M ad M Z, duplicem habebit solutionem. Recta enim H M, atque etiam alia ipsi Λ M occurrens ultra punctum Λ, rem præstant. Totum hoc patet ex prius demonstratis.

LOCUS QUARTUS.

Cadat jam recta, quæ per H ducitur ipsi A B parallela, ultra punctum Z; ita ut Z sit inter illam & punctum M: sitque ea recta H K. Recta vero per puncta H, Z ducta & producta, vel incidet super ipsum punctum Γ; vel inter illud & punctum Λ; vel inter illud & punctum M. Cadat autem imprimis

primis inter illud & punctum Α, ut recta Η Θ; & manifestum est rectas per punctum Η ductas disponi posse juxta quinque diversos Casus.

Cas. I. Ducatur autem modo primo, recta Ν Η Σ auferens rationem Γ Ν ad Ζ Σ datam. Per punctum Θ ducatur recta parallela ipsi Μ Ζ; ac producatur recta Ν Σ usque ad punctum Λ. Quoniam autem punctum Ζ datur, etiam recta Θ Ζ Η positione datur; ac rectâ Α Β positione datâ, punctum Θ etiam datur: adeoque recta Ο Θ Λ *ipsi* Δ Ε *parallela positione* data est. Ratio autem Θ Η ad Η Ζ datur; quare ratio etiam Θ Λ ad Ζ Σ datur. Quoniam vero ratio Γ Ν ad Ζ Σ datur, ratio quoque Θ Λ ad Γ Ν datur. Jam



dantur rectæ duæ Α Β, Θ Λ; ac sumitur in recta Θ Λ punctum Θ, in recta autem Α Β punctum Γ; punctum autem datum Η est intra angulum Λ Θ Β; cadit etiam recta parallela ultra punctum Γ. Ducenda est igitur recta Ν Η Λ, auferens rationem Θ Λ ad Γ Ν datam. Recta autem Η Λ positione datur, per demonstrata in Casu primo Loci sexti; qui quidem Casus determinationem non habet.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus quæ supra, sit ratio data sicut Ρ ad Τ. Dico quod recta Ν Λ satisfacit problemati. Quoniam enim Ζ Η ad Η Θ, sive Ζ Σ ad Θ Λ, est ut Ρ ad Ξ; ac Θ Λ ad Γ Ν est ut Ξ ad Τ; ex æquo erit Ζ Σ ad Γ Ν sicut Ρ ad Τ, adeoque recta Ν Η Λ solvit problema. Q. E. D.

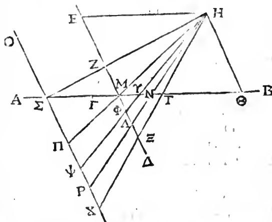
Cas. II. Ducatur jam, juxta Casum secundum, recta Η Λ auferens rationem Γ Ν ad Ζ Λ datam; ducatur per punctum Σ recta parallela ipsi Ε Δ, ut Ο Σ Ρ: ac dato utroque puncto Η & Ζ, recta Η Ζ Σ etiam positione datur. Datâ autem positione rectâ Α Β, punctum Σ datur; ductâ vero rectâ Ο Σ Ρ per datum

datum punctum Σ, datæque rectæ AE parallelâ, ipsa OP positione datur. Duc etiam rectam ipsi ΔE parallelam, per punctum H, ut HΘ: adeoque punctum Θ datur. Denique ducatur recta HΛ. Quoniam autem puncta HZΣ dantur, ratio ipsius ΣH ad HZ datur; adeoque ratio PΣ ad ZΛ datur. Sed data est ratio ΛZ ad ΓN, *quare ratio* PΣ *ad* ΓN *datur*. Jam dantur positione rectæ duæ OP, AB; ac in recta OP sumitur punctum Σ, & in AB punctum Γ; recta autem parallela HΘ cadit ultra punctum datum Γ. Ducenda est igitur recta HP, juxta Casum secundum Loci sexti Lib. I. auferens rationem ΣP ad ΓN datam; quare recta HP positione datur. Determinationem autem habet. Quoniam vero media proportionalis inter ΘΣ & ΣΓ major esse potest quam recta ΣM, vel non major eâ: primum non sit major eâ; ac ducatur recta HM. Dico quod HM auferet rationem ΓM ad MZ, majorem quâvis ratione, quæ resecari possit à rectis per punctum H ductis rectæque ΓM occurrentibus. *Producatur autem recta* HM ad punctum Π. Jam quia media proportionalis inter ΘΣ, ΣΓ non est major quam ΣM, potest esse vel æqualis illi, vel minor eâ. Et si fuerit æqualis ipsi ΣM, cum dentur positione duæ rectæ OP, AB; ac in OP sumatur punctum Σ, in AB vero punctum Γ; cadat autem recta parallela ΘH ultra punctum Γ; recta HM producta ad Π (per Casum secundum Loci sexti) auferet rationem ΠΣ ad ΓM, minorem quavis ratione quam resecat recta quævis alia sic ducta. *Si vero media proportionalis inter* ΘΣ, ΣΓ *minor fuerit quam* ΣM, *recta* HM propior erit rectæ rationem minimam abscindenti, quam recta quævis HP; quare ratio ΠΣ ad ΓM minor erit ratione PΣ ad ΓN; ac permutando ratio ΠΣ ad PΣ, hoc est ZM ad ΛZ, minor erit ratione ΓM ad ΓN. Atque iterum permutando, ratio ZM ad MΓ minor erit ratione

tione

tione Z Λ ad Γ N. Invertendo autem rationem, erit ratio Γ M ad Z M major ratione Γ N ad Z Λ. Unde patet rectam H M auferre rationem Γ M ad M Z, majorem omnibus rectis per punctum H ductis ipsique M Δ occurrentibus.

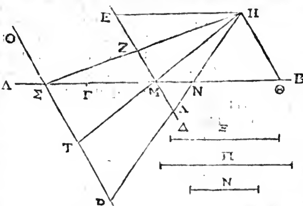
Sin autem media proportionalis inter rectas Θ Σ, Σ Γ, major fuerit quam est Σ M; sit ea recta Σ N. Junge H N, quæ producatur in directum. Junge etiam H M. Dico quod recta H N aufert rationem Γ N ad Z Λ, majorem quavis aliâ ratione à rectis per H ductis, totique rectæ M Δ occurrentibus, ablatâ. Producantur rectæ H M, H Λ ad Π & P, ac ab utraque parte ipsius H P ducantur rectæ H Ξ, H Φ ad puncta X & Ψ continuandæ. Jam rectæ duæ O P, A B positione dantur; ac in O P sumitur punctum Σ, in A B vero punctum Γ; ac recta H Θ, quæ per punctum datum H ducitur ipsi O P parallela, cadit ultra punctum Γ: recta autem Σ N media proportionalis



est inter Θ Σ & Σ Γ. Quocirca recta H N P ducta & producta (per Casum secundum Loci sexti) auferet rationem P Σ ad Γ N minimam. Ductâ igitur aliâ rectâ, ut H X; ratio P Σ ad Γ N minor erit ratione Σ X *ad* Γ T; ac permutando P Σ ad Σ X minor erit ratione Γ N ad Γ T. Sed P Σ est ad Σ X ut Z Λ ad Z Ξ; adeoque ratio Λ Z ad Z Ξ minor erit ratione Γ N ad Γ T; permutando autem ratio Λ Z ad Γ N minor erit ratione Z Ξ ad Γ T. Invertendo itaque, ratio Γ N ad Λ Z major erit ratione Γ T ad Z Ξ: quare recta H Λ aufert rationem majorem quam quævis recta H Ξ; nempe rationem Γ N ad Z Λ, quæ major est quavis ratione, à recta qualibet per punctum H transeunte, totique rectæ Δ M occurrente, abscissâ. Dico præterea quod recta H M aufert rationem Γ M ad M Z, minorem quacunque ratione, à rectis per H ductis, solique

rectæ M Λ occurrentibus, abscissâ. Quoniam enim recta H P aufert rationem minimam P Σ ad Γ N (per Casum secundum Loci sexti) ac rectæ propiores ipsi H P semper abscindunt rationes minores quam remotiores ab eâdem; ratio igitur Σ Ψ ad Γ Υ minor erit ratione Π Σ ad Γ M; ac permutando ratio Σ Ψ ad Π Σ minor erit ratione Γ Υ ad Γ M. Sed Σ Ψ est ad Π Σ ut Φ Z ad Z M; quare ratio Φ Z ad Z M minor erit ratione Γ Υ ad Γ M. Dein permutando, ratio Φ Z ad Γ Υ minor erit ratione Z M ad Γ M. Invertendo itaque, ratio Γ Υ ad Φ Z major erit ratione Γ M ad Z M. Recta igitur H M aufert rationem minorem quam quæ resecatur à recta H Φ. Unde patet rectam H M auferre rationem Γ M ad M Z, minorem quavis ratione, à rectis per H ductis, ipsique M Λ occurrentibus, abscissâ. Q. E. D.

Componetur autem problema in hunc modum. Maneant jam descripta; ac primum sit media proportionalis inter Θ Σ, Σ Γ, non major quam Σ M. Jungatur H M, ac recta H M auferet rationem Γ M ad M Z, majorem omni ratione, à rectâ quavis per H ductâ totiq; rectæ M Δ occurrente, abscindendâ. Erit autem ratio

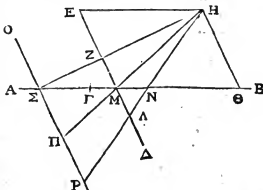


ad construendum proposita vel æqualis rationi Γ M ad M Z; vel major erit eâ; vel minor. Si æqualis fuerit ei, tum recta H M solvet problema. Si vero major fuerit ratione illâ, non componi potest, quia ratio proposita major est maximâ. Quod si ratio minor fuerit, uno tantum modo efficietur. Sit autem data ratio sicut Ξ ad N, quæ minor sit ratione Γ M ad M Z. Fiat ut Σ H ad H Z ita Π ad N; ac producatur H M ad T. Jam constat, ex determinatione Casus secundi Loci sexti, quod ratio T Σ ad T M vel minima est; vel propior erit rationi minimæ, quam ratio quævis alia à rectâ ipsi P T occurrente

 abscissâ.

abſciſsâ. Quoniam autem ΣΗ eſt ad ΗΖ ut Π ad Ν; ac ΣΗ eſt ad ΗΖ ut ΣΤ ad ΖΜ; erit etiam Π ad Ν ſicut ΣΤ ad ΖΜ. At vero ratio Ν ad Ξ major eſt ratione ΜΖ ad ΓΜ; quare ex æquo erit ratio Π ad Ξ major ratione ΣΤ ad ΓΜ. Cum autem ratio ΣΤ ad ΓΜ vel minima ſit; (per Caſum ſecundum Loci ſexti) vel minor ratione quavis, quam abſcindit recta quælibet ipſi ΤΡ occurrens; eâ vero major ſit ratio Π ad Ξ; duci poſſunt rectæ duæ, ab utroque latere ipſius ΗΜ, quæ auferant rationes æquales rationi Π ad Ξ. Harum vero altera non ſolvit problema, quæ ſcilicet ducta occurrit rectæ ΜΖ; altera autem occurrens rectæ ΜΔ ſatisfacit problemati. Ductâ igitur rectâ ΗΡ auferente rationem ΡΣ ad ΓΝ æqualem rationi Π ad Ξ; dico rectam illam ΗΡ ſolvere problema, ſive ΓΝ eſſe ad ΖΛ ſicut Ξ ad Ν. Quoniam enim ΣΗ eſt ad ΗΖ ut Π ad Ν, ac ΣΗ eſt ad ΗΖ ſicut ΡΣ ad ΛΖ, erit etiam ΡΣ ad ΛΖ ſicut Π ad Ν. Sed ΓΝ eſt ad ΡΣ ut Ξ ad Π; quare ex æquo ΓΝ erit ad ΛΖ ſicut Ξ ad Ν: adeoque recta ΗΛΡ, eaque ſola, ſolvit problema. Q. E. D.

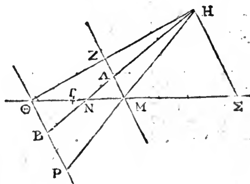
Quod ſi media proportionalis inter ΘΣ, ΣΓ major fuerit quam ΣΜ; ſit illa æqualis ipſi ΣΝ; ac junctæ ΗΝ, ΗΜ producantur ad puncta Ρ & Π. Recta igitur ΗΡ auferet rationem ΓΝ ad ΛΖ, majorem quavis ratione, quæ reſecari poſſit à rectis per punctum Η ductis ipſiſque ΓΒ, ΖΔ occurrentibus: ac recta ΗΜ auferet rationem ΓΜ ad ΜΖ, minorem quavis ratione quam abſcindunt rectæ quævis per Η ductæ ipſique ΜΛ occurrentes. Ratio autem data vel erit æqualis rationi ΝΓ ad ΖΛ; vel major erit eâ; vel minor. Vel



major erit ratione ΓΜ ad ΜΖ; vel æqualis; vel minor eâ. Jam ſi ratio fuerit æqualis ΓΝ ad ΖΛ, ſola recta ΗΝΛ ſatisfacit problemati; ac ſi major fuerit eâ non componetur. Quod ſi minor fuerit eâ, ſed major ratione ΓΜ ad ΜΖ, conſtruetur

struetur problema duobus modis, *ab utraque scilicet parte* ipsius Η Λ. Si vero minor fuerit ratione Γ Μ ad Μ Ζ, uno tantum modo componetur, scilicet ultra punctum Λ.

Cas. III. Ducatur jam, juxta modum tertium, recta Η Λ auferens rationem Ν Γ ad Λ Ζ datam. Datur autem ratio Λ Ζ ad Β Θ: quare ratio Β Θ ad Ν Γ datur. Datur igitur positione recta Η Λ, per ea quæ habentur ad Casum secundum Loci sexti Lib. I.

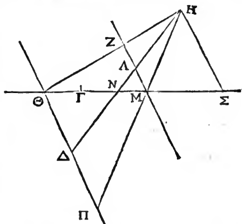


Determinatur autem ad hunc modum. Quoniam media proportionalis inter Θ Σ & Θ Γ vel minor esse potest quam recta Θ Μ, vel non minor eâ: primum non sit minor eâ; ac jungatur recta Η Μ, quæ producatur ad Ρ. Manifestum est, ex jam demonstratis, rectam Η Μ auferre rationem Γ Μ ad Μ Ζ, majorem quavis ratione, quam abscindunt rectæ quævis per Η ductæ ipsique Γ Μ occurrentes. Q. E. D.

Quod si media proportionalis inter Θ Σ & Θ Γ minor fuerit quam Θ Μ; sit illa recta Θ Ν. Jungantur Η Μ, Η Ν, quæ producantur ad Ρ & Β; & patet, per ea quæ in præcedentibus demonstrantur de limitibus, quod recta Η Ν aufert rationem Γ Ν ad Λ Ζ, majorem quâvis ratione, à rectis quibuslibet per Η ductis, ipsiq; Γ Μ occurrentibus, abscissâ; quodque recta Η Μ aufert rationem Γ Μ ad Μ Ζ, minorem quavis ratione à rectis ipsam Μ Ν intersecantibus ablatâ.

Componetur autem problema in hunc modum. Maneant quæ supra; ac capiatur media proportionalis inter Θ Σ & Θ Γ. Hæc minor erit quam Θ Μ, vel non minor erit eâ. Ac primum non sit minor eâ. Juncta recta Η Μ producatur ad Ρ; ac recta Η Μ Ρ auferet rationem Γ Μ ad Μ Ζ, majorem ratione quavis, à rectis per Η ductis, ipsique Γ Μ occurrentibus, abscissâ. Si igitur proponatur ratio construenda, quæ

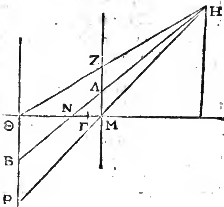
æqualis ſit rationi Γ M ad M Z, patet ſolam rectam H M ſatisfacere problemati. Si vero major eâ fuerit ratio propoſita, non componi poteſt. At ſi minor fuerit eâ, patet ex compoſitionibus jam deſcriptis, quod uno tantum modo fieri poſſit, rectâ ſcilicet ipſi Γ M occurrente.



Quod ſi media proportionalis inter ipſas Σ Θ, Θ Γ minor fuerit quam ipſa Θ M, ut Θ N: junge rectas H M, H N, quæ producantur ad puncta Π & Δ; ac recta H Δ auferet rationem Γ N ad Λ Z majorem quâvis ratione quam ſecant rectæ quævis aliæ per punctum H ductæ, totique rectæ Γ M occurrentes; vel quam rectæ quæ ſoli rectæ M N occurrunt. Recta vero H Π abſcindet rationem Γ M ad M Z minorem quavis ratione quam auferunt rectæ *qualibet ſoli* M N *occurrentes.* Quare ſi proponatur ad conſtruendum ratio æqualis rationi Γ N ad Λ Z, manifeſtum eſt rectam H N ſatisfacere problemati; ac ſi major fuerit eâ, componi non poſſe. Quod ſi ratio data minor fuerit quam ratio Γ N ad Λ Z, major vero quam Γ M ad M Z; conſtat, è determinationibus modo deſcriptis, problema duobus modis componi poſſe, ab utraque parte ipſius H Δ, rectis ipſis Γ N & N M occurrentibus. Si vero ratio minor fuerit quam Γ M ad M Z, patet ex iiſdem limitationibus, unam ſolam rectam ipſi Γ N occurrentem ſolvere problema. Si denique ratio data æqualis fuerit rationi Γ M ad M Z, ex iiſdem præmiſſis conſequitur, componi poſſe duobus modis; rectamque H M ſolvere problema, atque etiam rectam aliam ipſi Γ N occurrentem. Q. E. D.

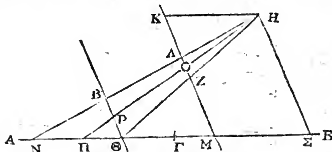
Caſ. IV.

Cas. IV. Ducatur jam recta Η Λ Ν, juxta Casum quartum, auferens rationem Γ Ν ad Λ Ζ datam. Producatur hæc ad punctum Β; & ob datam rationem Λ Ζ ad Β Θ, ratio quoque Β Θ ad Ν Γ datur: recta igitur Η Λ Ν positione datur, juxta demonstrata in Casu tertio Loci sexti, qui non habet limites. Constructio autem manifesta est.



Cas. V. Ducatur jam modo quinto recta Η Λ Ν, auferens rationem Λ Ζ ad Γ Ν datam. Quoniam ratio Λ Ζ ad Β Θ datur, data quoque est ratio Θ Β ad Ν Γ; unde etiam recta Η Λ Ν positione datur. Reducitur enim ad Casum quartum Loci sexti.

Determinatur autem hunc in modum. Manentibus descriptis; sit Θ Ν media proportionalis inter Θ Σ, Θ Γ. Junctâ Η Ν, dico quod hæc recta Η Λ Ν aufert rationem Ζ Λ ad Ν Γ, majorem quacunque ratione, quam abscindere potest recta quævis per Η ducta, totique rectæ Θ Λ occurrens. Ducatur enim recta alia ut Η Π; quoniam autem recta Θ Ν media



proportionalis est inter Θ Σ, Θ Γ, erit ratio Θ Β ad Ν Γ major ratione Θ Ρ ad Γ Π; ac permutando erit ratio Θ Β ad Θ Ρ major ratione Γ Ν ad Γ Π. Sed Θ Β est ad Θ Ρ ut Ζ Λ ad Ζ Ο; quare ratio Ζ Λ ad Ζ Ο major est ratione Γ Ν ad Γ Π: ac permutando ratio Ζ Λ ad Γ Ν major erit ratione Ζ Ο ad Γ Π.

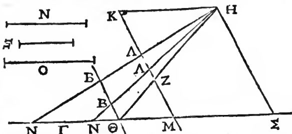
Recta igitur H Λ N aufert rationem Λ Z ad N Γ, majorem quavis aliâ rectâ per H ductâ, ipsique Θ Λ occurrente. Q. E. D.

Sic autem componetur problema. Maneant jam descripta, ac fiat recta Θ N media proportionalis inter Σ Θ, Θ Γ. Jungatur H N, ac recta H N auferet rationem Z Λ ad Γ N, majorem quâvis aliâ ratione, quam abscindet recta quævis per H ducta totique Θ Λ occurrens. Si itaque ratio ad componendum proposita æqualis fuerit rationi Λ Z ad Γ N, sola recta H Λ N solvet problema. Si vero ratio data major fuerit eâ, tum non construi potest problema. Quod si minor fuerit eâ, patet ex jam demonstratis, duas rectas duci posse quæ problema solvant, nempe occurrentes ipsis Λ N, N Θ.

LOCUS QUINTUS.

Cadat jam recta H Θ, à puncto H per punctum Z ducta, citra punctum Γ, *sive inter illud & punctum* M; ac manifestum est rectas duci posse per punctum H juxta quinque Casus.

Cas. I. II. Imprimis autem ducantur rectæ N H, ad modum Casus primi & secundi, auferentes rationes Z Λ ad Γ N datas. Quoniam ratio Λ Z ad Θ B datur, dabitur quoque ratio B Θ ad N Γ. Dantur autem positione rectæ duæ, quarum altera Θ B notatur in puncto Θ, altera vero M N in puncto Γ; ac punctum datum H est intra angulum B Θ M. Ducendæ sunt igitur rectæ H N, juxta Casus primum & secundum *Loci quarti*, auferentes rationes datas Θ B ad Γ N; ac proinde datæ erunt positione rectæ H N, per regulas eorundem Casuum; qui quidem non habent limites.



Componentur autem problemata hunc in modum. Manentibus quæ prius, sit ratio data sicut N ad O; ac fiat ut Z H ad H Θ ita N ad Ξ. Jam dantur positione rectæ duæ, nempe Θ B, Γ M; ac sumitur in Θ B punctum Θ; in alterâ vero M N punctum Γ; punctum autem datum H est intra angulum M Θ B. Rectæ igitur H N, ductæ juxta Casus primum & secundum Loci quarti, auferent rationes

rationes ΘB ad ΓN æquales rationi Ξ ad O; unde patet rectam HN satisfacere problemati.

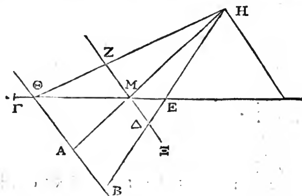
Cas. III. Ducatur, juxta Casum tertium, recta HN auferens rationem ZΛ ad ΓN datam; ac producatur ea ad punctum E. Datâ autem ratione ZΛ ad EΘ, data quoque erit ratio EΘ ad ΓN: unde recta HNE positione datur, secundum demonstrata in Casu tertio Loci quarti. Determinatur autem hunc in modum. Junge rectam HM, quæ producatur ad K: dico rectam HK auferre rationem ZM ad MΓ, majorem quàvis ratione, à recta qualibet per punctum H ductâ, ipsique ZM occurrente, abscissâ. Ducatur enim recta alia ut HE; ac manifestum est rectam, puncto Θ propiorem, semper abscindere rationem minorem, quam quæ aufertur à remotiore ab eodem: adeoque erit ratio EΘ ad ΓN minor ratione KΘ ad ΓM. Permutando autem ratio KΘ ad EΘ major erit ratione ΓM ad ΓN. Sed KΘ est ad EΘ ut ZM ad ZΛ; quare ratio ZM ad ZΛ major erit ratione ΓM ad ΓN; ac permutando ratio ZM ad ΓM major erit ratione ZΛ ad ΓN. Quocirca recta HK aufert rationem MZ ad ΓM majorem quavis ratione, à rectâ quacunque per punctum H ductâ, ipsique ΘM occurrente, ablatâ.

Componetur autem hunc in modum. Manentibus jam descriptis, jungatur HM, ac producatur ad K. Recta hæc HK auferet rationem ZM ad MΓ, majorem quavis ratione, quam aufert recta alia quævis per H ducta rectæque ΘM occurrens. Si itaque ratio ad componendum data æqualis fuerit rationi MZ ad ΓM; sola recta HK solvet problema. Si vero ratio data major fuerit eâ, non componetur. Quod si minor fuerit eâ, manifestum est è determinationibus præcedentibus, uno tantum modo problema effici posse, rectâ scilicet ipsi ΘM occurrente.

Cas. IV

Cas. IV. Ducatur recta Η Δ, juxta modum quartum, auferens rationem Z Δ ad Γ E datam; ac producatur ea ad punctum B. Quoniam ratio Z Δ ad B Θ datur, ratio etiam B Θ ad Γ E data erit, adeoque recta H B dabitur positione: reducitur enim ad eundem Casum cum problemate præcedente.

Determinatur autem hunc in modum. Maneant jam descripta, ac juncta recta H M producatur ad A: dico rectam H A auferre rationem Z M ad M Γ, minorem quavis ratione, à rectâ qualibet per punctum H ductâ ipsique M Ξ occurrente, abscissâ. Ducatur enim recta alia ut H B. Quoniam vero rectæ propiores puncto Θ auferunt rationes minores, quam quæ abscinduntur à remotioribus ab eo; ratio Θ A ad Γ M minor erit ratione Θ B ad Γ E; ac permutando, erit ratio Θ A ad Θ B minor ratione Γ M ad Γ E. Sed Θ A est ad Θ B ut

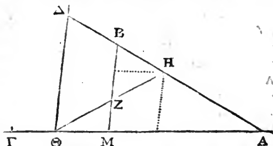


Z M ad Z Δ; adeoque ratio Z M ad Z Δ minor erit ratione Γ M ad Γ E. Permutando autem ratio Z M ad M Γ minor erit ratione Z Δ ad Γ E: quare recta H A aufert rationem M Z ad Γ M, minorem quavis ratione quam abscindere potest alia quælibet recta per H ducta ipsique M Ξ occurrens.

Componetur autem problema ad hunc modum. Jungatur recta H M ac producatur ad A; ac recta H A auferet rationem Z M ad M Γ, minorem quavis aliâ à rectis per H ductis ipsique Ξ M occurrentibus abscissâ. Igitur si ratio ad construendum proposita æqualis fuerit rationi Z M ad M Γ, sola recta H A satisfacit problemati. Si vero minor fuerit eâ, non componetur. Quod si major fuerit eâ, demonstratum est in præmissis, unam solam rectam ipsi Ξ M occurrentem solvere problema.

Cas. V.

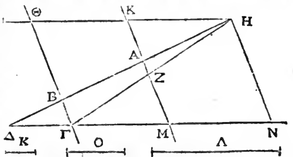
Cas. V. Ducatur, juxta modum quintum, recta A B auferens à rectis Γ A, Z B rationem Z B ad Γ A datam; ac producatur ea ad punctum Δ. Quoniam data est ratio Z B ad Θ Δ, datur etiam ratio Θ Δ ad Γ A; adeoque recta Δ A positione datur; juxta resolutionem Casus quarti Loci quarti, qui non habet limites. Compositio autem manifesta est.



LOCUS SEXTUS.

Incidat jam recta, per puncta H, Z ducta, super ipsum punctum Γ in recta altera sumptum, ut recta H Z Γ: ac manifestum est rectas per punctum H duci posse juxta quatuor modos.

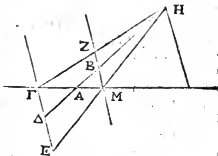
Cas. I. Ducatur autem imprimis recta H B, juxta Casum primum, auferens rationem Z A ad Γ Δ datam, ac producatur ea *ad* Δ. *Quoniam ratio* Z A *ad* Γ B *datur*, *dabitur etiam ratio* Γ B ad Γ Δ, adeoque recta B Δ positione datur, per ea quæ demonstrantur in Casu primo Loci tertii Lib. I. Oportet autem rationem datam minorem esse ratione K Z ad Γ N. Ducatur enim recta *ipsi* M Z K parallela, ut H N, ac producatur utraque H K, Γ B ad Θ. Quoniam autem ratio Θ Γ ad Γ B major est ratione Θ B ad Γ B; ac Θ Γ est ad Γ B sicut K Z ad Z A; atque etiam Θ B est ad B Γ ut Θ H ad Γ Δ; recta vero Θ H æqualis est ipsi Γ N: ratio igitur K Z ad Z A major erit ratione Γ N ad Γ Δ. Permutando autem, ratio K Z ad Γ N major erit ratione Z A ad Γ Δ. Oportet itaque rationem ad componendum datam minorem esse ratione K Z ad Γ N.



Compo-

Componetur autem problema in hunc modum. Esto ratio proposita sicut K ad Λ, quæ minor sit ratione KZ ad ΓN. Fiat ut ZH ad ΓH ita K ad O; cumque ZH est ad ΓH sicut KZ ad KM, erit etiam ZK ad KM sicut K ad O. Sed recta KM æqualis est ipsi HN: quare ZK est ad HN sicut K ad O; ac invertendo O erit ad K sicut HN ad KZ. Ratio autem K ad Λ minor est ratione KZ ad ΓN; igitur *ex æquo* ratio O ad Λ minor erit ratione HN ad NΓ. Quocirca si fiat ut O ad Λ ita HN ad NΔ, major erit illa quam recta NΓ. Junctâ autem HΔ, dico rectam HΔ solvere problema. Etenim K est ad O ut ZH ad HΓ, ac ZH est ad HΓ sicut ZA ad BΓ; adeoque ZA est ad BΓ ut K ad O. Sed NH est ad NΔ, hoc est BΓ ad ΓΔ, sicut O ad Λ: igitur ex æquo erit ZA ad ΓΔ sicut K ad Λ; adeoque recta HΔ solvit problema. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur jam, juxta modum secundum, recta HA auferens rationem BZ ad ΓA datam. Producatur ea ad punctum Δ. Quoniam autem ratio BZ ad ΓΔ datur, data est quoque ratio ΓΔ ad ΓA; quapropter recta HΔ positione datur: reducitur enim ad Casum secundum Loci tertii. Determinatio autem hæc est. Juncta HM producatur ad E, ac dico quod recta HM auferet rationem ZM ad MΓ *majorem* quavis ratione quam resecant rectæ per H ductæ ipsique ΓM occurrentes. Ductâ enim rectâ HΔ; cum rectæ propiores puncto Γ abscindunt semper rationes minores, quam quæ auferuntur à remotioribus ab eo: manifestum est rationem EΓ ad ΓM *majorem* esse ratione ΔΓ ad ΓA; ac permutando, rationem EΓ ad ΓΔ *majorem* esse ratione MΓ ad ΓA.

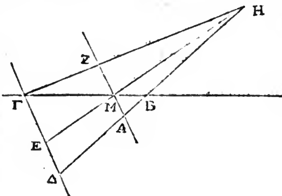


Sed EΓ est ad ΓΔ sicut MZ ad ZB; adeoque ratio MZ ad ZB *major* erit ratione MΓ ad ΓA. Permutando autem ratio MZ ad ΓM *major* erit ratione ZB ad ΓA; quare recta HM aufert rationem ZM ad MΓ *majorem* quavis ratione quam auferant rectæ per H ductæ, totique rectæ ΓM occurrentes.

Componetur autem problema ad hunc modum. Maneant jam descripta, ac juncta HM producatur ad E. Recta hæc

HM auferet rationem ZM ad MΓ, * *majorem* quacunque ratione quam resecant rectæ quævis aliæ per H ductæ, totique rectæ ΓM occurrentes. Si igitur ratio proposita æqualis fuerit rationi ZM ad MΓ, sola recta HM solvit problema. Si *major* fuerit data ratio, non componi potest. Quod si *minor* fuerit eâ, patet quod, juxta Casum prædictum, duci possit recta, quæ occurrens rectæ ΓM solvat problema. Q. E. D.

Cas. III. Ducatur, juxta modum tertium, recta HA auferens rationem ZA ad ΓB datam, ac producatur ea ad punctum Δ. Quoniam ratio AZ ad ΓΔ datur, ratio ipsius BΓ ad ΓΔ etiam data est: unde recta HΔ positione datur. Reducitur enim ad eundem Casum cum problemate præcedente. Determinatur autem hunc in modum. Junge HM, quæ producatur ad E. Cum autem rectæ propiores puncto Γ auferunt semper rationes * *minores* quam quæ resecantur à remotioribus ab eo (per nuper demonstratas limitationes) constat rectam HM auferre rationem ZM ad MΓ *minorem* quavis aliâ à rectis per punctum H ductis, totique rectæ MB occurrentibus, abscissis.



Sic autem componetur problema. Manentibus descriptis, jungatur HM que producatur ad E: recta hæc HM auferet rationem MZ ad ΓM, *minorem* quavis ratione, à qualibet aliâ per H ductâ, totique MB occurrente, abscissâ. Si igitur proponatur ratio componenda quæ æqualis sit rationi ZM ad MΓ; sola recta HM satisfacit problemati. Quod si *minor* fuerit eâ, non componetur. Si vero * *major* fuerit, manifestum est ex limitationibus præmissis rectam problema solventem occurrere ipsi MB. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur, juxta Casum quartum, recta AHB aufe-

* *In Cas.* II. *&* III. *ubique fere contrarium habet MS. Codex, manifestâ mendâ.*

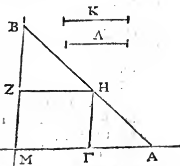
rens rationem BZ ad ΓA datam. Producatur ea ad Δ. Datâ autem ratione BZ ad ΓΔ, datur quoque ratio ΓΔ ad ΓA: jam rectæ duæ ΓA, ΓΔ dantur positione; ac in utrâque earum sumitur punctum Γ; punctum autem datum H est intra angulum AΓΔ. Ducenda est igitur recta AΔ, juxta Casum tertium Loci tertii, auferens rationem ΓΔ ad ΓA datam; adeoque recta AΔ datur positione, (per ea quæ in prædicto casu demonstrantur) neque habet determinationem.

Componetur autem problema hunc in modum. Maneant descripta, ac sit ratio data sicut N ad Ξ. Fiat ut HZ ad ΓH ita N ad O. Jam dantur positione rectæ duæ ΓA, ΓΔ invicem occurrentes in puncto Γ; punctum autem datum H est intra angulum AΓΔ. Ducatur itaque recta AΔ (per Casum tertium Loci tertii) quæ auferat rationem ΓΔ ad ΓA æqualem rationi O ad Ξ; ac manifestum est rectam AΔ satisfacere problemati.

LOCUS SEPTIMUS.

Sit jam punctum datum H intra angulum AMB; ac ducantur per H rectæ duæ parallelæ rectis datis AM, MB, ut ΓH, HZ; quæ occurrant ipsis datis in punctis Γ & Z. Ac manifestum est quod rectæ duci possint per punctum H juxta tres Casus.

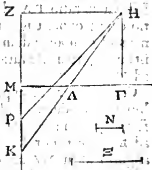
Cas. I. Ducatur autem imprimis recta AB, ad modum primum, auferens rationem ZB ad AΓ datam. Quoniam ZB est ad AΓ ut rectangulum ZB in AΓ ad quadratum ex AΓ; data est ratio rectanguli BZ in AΓ ad quadratum ex AΓ. Sed rectangulum BZ in AΓ datur, quia æqualis est rectangulo ZH in HΓ; adeoque recta ΓA datur. Dato autem puncto Γ,



Γ, punctum Α etiam datur: ac ob datum punctum Η recta ΑΒ positione datur. Q. E. I.

Componetur autem problema ad hunc modum. Maneant descripta, ac sit ratio proposita sicut Κ ad Λ. Fiat ut Κ ad Λ ita rectangulum ΗΖ in ΗΓ ad quadratum ex ΓΑ; ac juncta recta ΗΑ producatur ad Β: dico rectam ΑΒ satisfacere problemati. Quoniam enim rectangulum ΓΗ in ΗΖ est ad quadratum ex ΓΑ ut Κ est ad Λ, ac rectangulum ΖΒ in ΓΑ æquale est rectangulo ΓΗ in ΗΖ; erit rectangulum ΖΒ in ΓΑ ad quadratum ex ΓΑ ut Κ ad Λ: adeoque erit ΖΒ ad ΓΑ sicut Κ ad Λ. Recta igitur ΑΒ solvit problema. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur, juxta Casum secundum, recta ΗΚ auferens rationem ΓΑ ad ΚΖ datam. Quoniam ratio ΓΑ ad ΚΖ datur, data erit ratio rectanguli ΓΑ in ΚΖ ad quadratum ex ΚΖ. Sed rectangulum ΓΑ in ΚΖ æquale est rectangulo ΓΜ in ΜΖ, adeoque ratio rectanguli ΓΜ in ΜΖ ad quadratum ex ΚΖ datur. Rectangulum autem ΓΜ in ΜΖ datur, ob cognitam utramque rectam; quadratum igitur ex ΚΖ datum est, adeoque & ipsa ΚΖ datur magnitudine & positione: ac dato puncto Ζ punctum Κ datur, unde & ipsa ΚΗ *positione datur*. Quoniam autem recta ΜΓ major est ipsâ ΓΑ, ac recta ΜΖ minor est quam ΚΖ; erit ratio ΜΓ ad ΓΑ major ratione ΜΖ ad ΖΚ; ac permutando, ratio ΜΓ ad ΜΖ major erit ratione ΓΑ ad ΖΚ. Sed ratio ΓΑ ad ΖΚ est ratio data: oportet igitur rationem construendam minorem esse ratione ΓΜ ad ΜΖ.

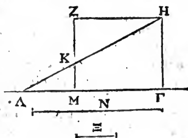


Componetur autem problema in hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut Ν ad Ξ, minor ratione ΓΜ ad ΜΖ. Quoniam autem ratio ΓΜ ad ΜΖ major est ratione Ν ad Ξ, ratio rectanguli ΓΜ in ΜΖ ad quadratum ex ΜΖ major erit ratione Ν ad Ξ. Ponatur igitur ut Ν ad Ξ ita rectangulum ΓΜ ad ΜΖ ad rectangulum aliud; quod proinde majus erit quadrato ex ΜΖ, nempe æquale quadrato ex ΚΖ. Dico quod recta ΚΗ solvit problema; sive quod ΓΑ est ad ΚΖ ut Ν ad Ξ. Etenim ut Ν est ad Ξ ita rectangulum ΓΜ in ΜΖ ad quadratum ex ΚΖ. Sed rectangulum ΓΜ in ΜΖ

 æquale

æquale est rectangulo Γ Λ in K Z; adeoque erit ut N ad Ξ ita rectangulum Γ Λ in K Z ad quadratum ex K Z, hoc est, ita Γ Λ ad K Z. Recta igitur K H solvit problema; ac dico quod ea sola. Nam si ducatur recta alia, ut H P; manifestum est illam satisfacere problemati, hanc vero non item.

Cas. III. Manentibus quæ prius, ducatur recta H K Λ, juxta modum tertium, auferens rationem Γ Λ ad K Z datam. Quoniam ratio Γ Λ ad K Z data est, dabitur quoque ratio rectanguli Γ Λ in K Z ad quadratum ex K Z. Sed rectangulum Γ Λ in K Z æquale est rectangulo Γ M in M Z: quare ratio Γ M in M Z ad quadratum ex K Z datur. Rectangulum autem Γ M in M Z datum est, ob datam utramque Γ M, M Z; adeoque quadratum ex K Z datur, atque ipsa K Z tam magnitudine quam positione; ac dato puncto Z, punctum K datur. Recta igitur K H Λ positione datur. Cum autem recta Γ Λ major est quam Γ M, ac K Z minor quam Z M; ratio Γ Λ ad Γ M major erit ratione K Z ad Z M; & permutando ratio Γ Λ ad K Z major erit ratione Γ M ad Z M. Est autem ratio Γ Λ ad K Z ratio data; oportet igitur rationem ad componendum propositam majorem esse ratione Γ M ad M Z.



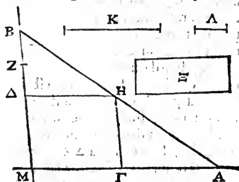
Componetur autem problema hunc in modum. Iisdem descriptis, sit ratio data sicut N ad Ξ; quæ major sit ratione Γ M ad M Z, sive ratione rectanguli Γ M in M Z *ad quadratum ex* M Z. Fiat igitur ut N ad Ξ ita rectangulum Γ M in M Z ad rectangulum aliud; quod minus erit quadrato ex M Z. Sit autem illud æquale quadrato ex K Z; ac juncta H K producatur ad Λ. Dico rectam H Λ solvere problema, sive quod Γ Λ est ad K Z sicut N ad Ξ. Quoniam enim rectangulum Γ M in M Z est ad quadratum ex K Z ut N ad Ξ; ac rectangulum Γ M in M Z æquale est rectangulo Γ Λ in K Z: erit rectangulum Γ Λ in K Z ad quadratum ex K Z, hoc est Γ Λ ad K Z, sicut N ad Ξ. Recta igitur H Λ solvit problema, eaque sola. Nam si ducatur recta alia, illa quidem satisfacit problemati, altera vero non item.

LOCUS

LOCUS OCTAVUS.

Cadat jam recta per punctum H ducta, rectæque ZM parallela, super ipsum punctum Γ; quæ vero alteri rectæ MA parallela ducitur, cadat citra punctum Z, ut HΔ. Ac manifestum est rectas duci posse per punctum H secundum quatuor formas.

Cas. I. Ducatur autem imprimis recta AHB, juxta modum primum, auferens rationem ΓA ad ZB æqualem rationi datæ. Quoniam ut AΓ est ad ZB ita rectangulum AΓ in ΔB ad rectangulum BZ in ΔB, ratio rectanguli AΓ in ΔB ad rectangulum ΔB in BZ datur. Sed rectangulum AΓ in ΔB æquale est rectangulo HΓ in ΓM *vel* HΔ: quare rectangulum ΔB in BZ datur, applicandum ad rectam datam ΔZ excedens quadrato; adeoque recta BZ datur, ipsumque punctum B datum. Dato autem puncto H, recta AHB positione data est.

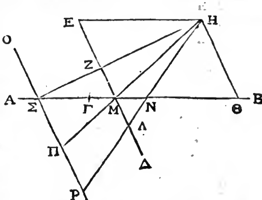


Componetur autem hunc in modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut K ad Λ. Fiat ut K ad Λ ita rectangulum HΓ in HΔ ad rectangulum Ξ; & applicetur ad rectam ΔZ rectangulum æquale rectangulo Ξ excedens quadrato. Sit illud rectangulum ΔB in BZ. Jungatur HB ac producatur ad A: dico rectam AB solvere problema. Quoniam enim K est ad Λ ut rectangulum ΓH in HΔ ad rectangulum Ξ; ac rectangulum Ξ æquale est rectangulo ΔB in BZ, uti rectangulum ΓH in HΔ æquale est rectangulo ΔB in AΓ: erit itaque rectangulum ΔB in AΓ ad rectangulum ΔB in BZ, hoc est, AΓ ad BZ, sicut K ad Λ. Recta igitur AB solvit problema. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur jam recta AB, juxta modum secundum, auferens rationem AΓ ad BZ datam. Ob datam rationem AΓ ad BZ, data quoque est ratio rectanguli AΓ in BΔ ad rectangulum BZ in BΔ. Rectangulum autem AΓ in BΔ datur,

abſciſsâ. Quoniam autem ΣΗ eſt ad ΗΖ ut Π ad Ν; ac ΣΗ eſt ad ΗΖ ut ΣΤ ad ΖΜ; erit etiam Π ad Ν ſicut ΣΤ ad ΖΜ. At vero ratio Ν ad Ξ major eſt ratione ΜΖ ad ΓΜ; quare ex æquo erit ratio Π ad Ξ major ratione ΣΤ ad ΓΜ. Cum autem ratio ΣΤ ad ΓΜ vel minima ſit; (per Caſum ſecundum Loci ſexti) vel minor ratione quavis, quam abſcindit recta quælibet ipſi ΤΡ occurrens; eâ vero major ſit ratio Π ad Ξ; duci poſſunt rectæ duæ, ab utroque latere ipſius ΗΜ, quæ auferant rationes æquales rationi Π ad Ξ. Harum vero altera non ſolvit problema, quæ ſcilicet ducta occurrit rectæ ΜΖ; altera autem occurrens rectæ ΜΔ ſatisfacit problemati. Ductâ igitur rectâ ΗΡ auferente rationem ΡΣ ad ΓΝ æqualem rationi Π ad Ξ; dico rectam illam ΗΡ ſolvere problema, ſive ΓΝ eſſe ad ΖΛ ſicut Ξ ad Ν. Quoniam enim ΣΗ eſt ad ΗΖ ut Π ad Ν, ac ΣΗ eſt ad ΗΖ ſicut ΡΣ ad ΛΖ, erit etiam ΡΣ ad ΛΖ ſicut Π ad Ν. Sed ΓΝ eſt ad ΡΣ ut Ξ ad Π; quare ex æquo ΓΝ erit ad ΛΖ ſicut Ξ ad Ν: adeoque recta ΗΛΡ, eaque ſola, ſolvit problema. Q. E. D.

Quod ſi media proportionalis inter ΘΣ, ΣΓ major fuerit quam ΣΜ; ſit illa æqualis ipſi ΣΝ; ac junctæ ΗΝ, ΗΜ producantur ad puncta Ρ & Π. Recta igitur ΗΡ auferet rationem ΓΝ ad ΛΖ, majorem quavis ratione, quæ reſecari poſſit à rectis per punctum Η ductis ipſiſque ΓΒ, ΖΔ occurrentibus: ac recta ΗΜ auferet rationem ΓΜ ad ΜΖ, minorem quavis ratione quam abſcindunt rectæ quævis per Η ductæ ipſique ΜΛ occurrentes. Ratio autem data vel erit æqualis rationi ΝΓ ad ΖΛ; vel major erit eâ; vel minor. Vel



major erit ratione ΓΜ ad ΜΖ; vel æqualis; vel minor eâ. Jam ſi ratio fuerit æqualis ΓΝ ad ΖΛ, ſola recta ΗΝΛ ſatiſfacit problemati; ac ſi major fuerit eâ non componetur. Quod ſi minor fuerit eâ, ſed major ratione ΓΜ ad ΜΖ, conſtruetur

ſtruetur problema duobus modis, *ab utraque ſcilicet parte* ipſius H Λ. Si vero minor fuerit ratione Γ M ad M Z, uno tantum modo componetur, ſcilicet ultra punctum Λ.

Caſ. III. Ducatur jam, juxta modum tertium, recta H Λ auferens rationem N Γ ad Λ Z datam. Datur autem ratio Λ Z ad B Θ: quare ratio B Θ ad N Γ datur. Datur igitur poſitione recta H Λ, per ea quæ habentur ad Caſum ſecundum Loci ſexti Lib. I.

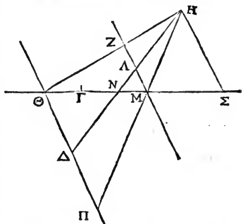
Determinatur autem ad hunc modum. Quoniam media proportionalis inter Θ Σ & Θ Γ vel minor eſſe poteſt quam recta Θ M, vel non minor eâ: primum non ſit minor eâ; ac jungatur recta H M, quæ producatur ad P. Manifeſtum eſt, ex jam demonſtratis, rectam H M auferre rationem Γ M ad M Z, majorem quavis ratione, quam abſcindunt rectæ quævis per H ductæ ipſique Γ M occurrentes. Q. E. D.

Quod ſi media proportionalis inter Θ Σ & Θ Γ minor fuerit quam Θ M; ſit illa recta Θ N. Jungantur H M, H N, quæ producantur ad P & B; & patet, per ea quæ in præcedentibus demonſtrantur de limitibus, quod recta H N aufert rationem Γ N ad Λ Z, majorem quâvis ratione, à rectis quibuſlibet per H ductis, ipſiq; Γ M occurrentibus, abſciſsâ; quodque recta H M aufert rationem Γ M ad M Z, minorem quavis ratione à rectis ipſam M N interſecantibus ablatâ.

Componetur autem problema in hunc modum. Maneant quæ ſupra; ac capiatur media proportionalis inter Θ Σ & Θ Γ. Hæc minor erit quam Θ M, vel non minor erit eâ. Ac primum non ſit minor eâ. Juncta recta H M producatur ad P; ac recta H M P auferet rationem Γ M ad M Z, majorem ratione quavis, à rectis per H ductis, ipſique Γ M occurrentibus, abſciſsâ. Si igitur proponatur ratio conſtruenda, quæ

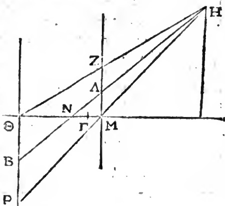
æqualis sit rationi Γ M ad M Z, patet solam rectam H M satisfacere problemati. Si vero major eâ fuerit ratio proposita, non componi potest. At si minor fuerit eâ, patet ex compositionibus jam descriptis, quod uno tantum modo fieri possit, rectâ scilicet ipsi Γ M occurrente.

Quod si media proportionalis inter ipsas Σ Θ, Θ Γ minor fuerit quam ipsa Θ M, ut Θ N: junge rectas H M, H N, quæ producantur ad puncta Π & Δ; ac recta H Δ auferet rationem Γ N ad Λ Z majorem quâvis ratione quam secant rectæ quævis aliæ per punctum H ductæ, totique rectæ Γ M occurrentes; vel quam rectæ quæ soli rectæ M N occurrunt. Recta vero H Π abscindet rationem Γ M ad M Z minorem quavis ratione quam auferunt rectæ *qualibet soli* M N *occurrentes*. Quare si proponatur ad construendum ratio æqualis rationi Γ N ad Λ Z, manifestum est rectam H N satisfacere problemati; ac si major fuerit eâ, componi non posse. Quod si ratio data minor fuerit quam ratio Γ N ad Λ Z, major vero quam Γ M ad M Z; constat, è determinationibus modo descriptis, problema duobus modis componi posse, ab utraque parte ipsius H Δ, rectis ipsis Γ N & N M occurrentibus. Si vero ratio minor fuerit quam Γ M ad M Z, patet ex iisdem limitationibus, unam solam rectam ipsi Γ N occurrentem solvere problema. Si denique ratio data æqualis fuerit rationi Γ M ad M Z, ex iisdem præmissis consequitur, componi posse duobus modis; rectamque H M solvere problema, atque etiam rectam aliam ipsi Γ N occurrentem. Q. E. D.



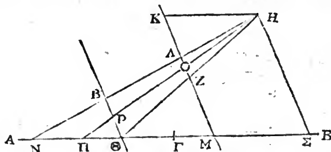
Cas. IV.

Cas. IV. Ducatur jam recta Η Λ Ν, juxta Casum quartum, auferens rationem Γ Ν ad Λ Ζ datam. Producatur hæc ad punctum Β; & ob datam rationem Λ Ζ ad Β Θ, ratio quoque Β Θ ad Ν Γ datur: recta igitur Η Λ Ν positione datur, juxta demonstrata in Casu tertio Loci sexti, qui non habet limites. Constructio autem manifesta est.



Cas. V. Ducatur jam modo quinto recta Η Λ Ν, auferens rationem Λ Ζ ad Γ Ν datam. Quoniam ratio Λ Ζ ad Β Θ datur, data quoque est ratio Θ Β ad Ν Γ; unde etiam recta Η Λ Ν positione datur. Reducitur enim ad Casum quartum Loci sexti.

Determinatur autem hunc in modum. Manentibus descriptis; sit Θ Ν media proportionalis inter Θ Σ, Θ Γ. Junctâ Η Ν, dico quod hæc recta Η Λ Ν aufert rationem Ζ Λ ad Ν Γ, majorem quacunque ratione, quam abscindere potest recta quævis per Η ducta, totique rectæ Θ Λ occurrens. Ducatur enim recta alia ut Η Π; quoniam autem recta Θ Ν media



proportionalis est inter Θ Σ, Θ Γ, erit ratio Θ Β ad Ν Γ major ratione Θ Ρ ad Γ Π; ac permutando erit ratio Θ Β ad Θ Ρ major ratione Γ Ν ad Γ Π. Sed Θ Β est ad Θ Ρ ut Ζ Λ ad Ζ Ο; quare ratio Ζ Λ ad Ζ Ο major est ratione Γ Ν ad Γ Π: ac permutando ratio Ζ Λ ad Γ Ν major erit ratione Ζ Ο ad Γ Π.

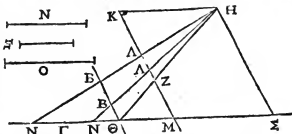
Recta igitur H Λ N aufert rationem Λ Z ad N Γ, majorem quavis aliâ rectâ per H ductâ, ipsique Θ Λ occurrente. Q. E. D.

Sic autem componetur problema. Maneant jam descripta, ac fiat recta Θ N media proportionalis inter Σ Θ, Θ Γ. Jungatur H N, ac recta H N auferet rationem Z Λ ad Γ N, majorem quâvis aliâ ratione, quam abscindet recta quævis per H ducta totique Θ Λ occurrens. Si itaque ratio ad componendum proposita æqualis fuerit rationi Λ Z ad Γ N, sola recta H Λ N solvet problema. Si vero ratio data major fuerit eâ, tum non construi potest problema. Quod si minor fuerit eâ, patet ex jam demonstratis, duas rectas duci posse quæ problema solvant, nempe occurrentes ipsis Λ N, N Θ.

LOCUS QUINTUS.

Cadat jam recta H Θ, à puncto H per punctum Z ducta, citra punctum Γ, *sive inter illud & punctum* M; ac manifestum est rectas duci posse per punctum H juxta quinque Casus.

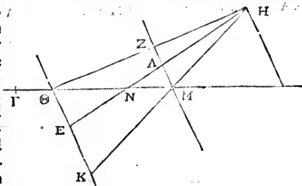
Cas. I. II. Imprimis autem ducantur rectæ N H, ad modum Casus primi & secundi, auferentes rationes Z Λ ad Γ N datas. Quoniam ratio Λ Z ad Θ B datur, dabitur quoque ratio B Θ ad N Γ. Dantur autem positione rectæ duæ, quarum altera Θ B notatur in puncto Θ, altera vero M N in puncto Γ; ac punctum datum H est intra angulum B Θ M. Ducendæ sunt igitur rectæ H N, juxta Casus primum & secundum *Loci quarti*, auferentes rationes datas Θ B ad Γ N; ac proinde datæ erunt positione rectæ H N, per regulas eorundem Casuum; qui quidem non habent limites.



Componentur autem problemata hunc in modum. Manentibus quæ prius, fit ratio data sicut N ad O; ac fiat ut Z H ad H Θ ita N ad Ξ. Jam dantur positione rectæ duæ, nempe Θ B, Γ M; ac sumitur in Θ B punctum Θ; in alterâ vero M N punctum Γ; punctum autem datum H est intra angulum M Θ B. Rectæ igitur H N, ductæ juxta Casus primum & secundum Loci quarti, auferent rationes

rationes ΘΒ ad ΓΝ æquales rationi Ξ ad Ο; unde patet rectam ΗΝ satisfacere problemati.

Cas. III. Ducatur, juxta Casum tertium, recta ΗΝ auferens rationem ΖΛ ad ΓΝ datam; ac producatur ea ad punctum Ε. Datâ autem ratione ΖΛ ad ΕΘ, data quoque erit ratio ΕΘ ad ΓΝ: unde recta ΗΝΕ positione datur, secundum demonstrata in Casu tertio Loci quarti. Determinatur autem hunc in modum. Junge rectam ΗΜ, quæ producatur ad Κ: dico rectam ΗΚ auferre rationem ΖΜ ad ΜΓ, majorem quâvis ratione, à recta qualibet per punctum Η ductâ, ipsique ΖΜ occurrente, abscissâ. Ducatur enim recta alia ut ΗΕ; ac manifestum est rectam, puncto Θ propiorem, semper abscindere rationem minorem, quam quæ aufertur à remotiore ab eodem: adeoque erit ratio ΕΘ ad ΓΝ minor ratione ΚΘ ad ΓΜ. Permutando autem ratio ΚΘ ad



ΕΘ major erit ratione ΓΜ ad ΓΝ. Sed ΚΘ est ad ΕΘ ut ΖΜ ad ΖΛ; quare ratio ΖΜ ad ΖΛ major erit ratione ΓΜ ad ΓΝ; ac permutando ratio ΖΜ ad ΓΜ major erit ratione ΖΛ ad ΓΝ. Quocirca recta ΗΚ aufert rationem ΜΖ ad ΓΜ majorem quavis ratione, à rectâ quacunque per punctum Η ductâ, ipsique ΘΜ occurrente, ablatâ.

Componetur autem hunc in modum. Manentibus jam descriptis, jungatur ΗΜ, ac producatur ad Κ. Recta hæc ΗΚ auferet rationem ΖΜ ad ΜΓ, majorem quavis ratione, quam aufert recta alia quævis per Η ducta rectæque ΘΜ occurrens. Si itaque ratio ad componendum data æqualis fuerit rationi ΜΖ ad ΓΜ; sola recta ΗΚ solvet problema. Si vero ratio data major fuerit eâ, non componetur. Quod si minor fuerit eâ, manifestum est è determinationibus præcedentibus, uno tantum modo problema effici posse, rectâ scilicet ipsi ΘΜ occurrente.

Cas. IV

Cas. IV. Ducatur recta Η Δ, juxta modum quartum, auferens rationem Ζ Δ ad Γ Ε datam; ac producatur ea ad punctum Β. Quoniam ratio Ζ Δ ad Β Θ datur, ratio etiam Β Θ ad Γ Ε data erit, adeoque recta Η Β dabitur positione: reducitur enim ad eundem Casum cum problemate præcedente.

Determinatur autem hunc in modum. Maneant jam descripta, ac juncta recta Η Μ producatur ad Α: dico rectam Η Α auferre rationem Ζ Μ ad Μ Γ, minorem quavis ratione, à rectâ qualibet per punctum Η ductâ ipsique Μ Ξ occurrente, abscissâ. Ducatur enim recta alia ut Η Β. Quoniam vero rectæ propiores puncto Θ auferunt rationes minores, quam quæ abscinduntur à remotioribus ab eo; ratio Θ Α ad Γ Μ minor erit ratione Θ Β ad Γ Ε; ac permutando, erit ratio Θ Α ad Θ Β minor ratione Γ Μ ad Γ Ε. Sed Θ Α est ad Θ Β ut

Ζ Μ ad Ζ Δ; adeoque ratio Ζ Μ ad Ζ Δ minor erit ratione Γ Μ ad Γ Ε. Permutando autem ratio Ζ Μ ad Μ Γ minor erit ratione Ζ Δ ad Γ Ε: quare recta Η Α aufert rationem Μ Ζ ad Γ Μ, minorem quavis ratione quam abscindere potest alia quælibet recta per Η ducta ipsique Μ Ξ occurrens.

Componetur autem problema ad hunc modum. Jungatur recta Η Μ ac producatur ad Α; ac recta Η Α auferet rationem Ζ Μ ad Μ Γ, minorem quavis aliâ à rectis per Η ductis ipsique Ξ Μ occurrentibus abscissâ. Igitur si ratio ad construendum proposita æqualis fuerit rationi Ζ Μ ad Μ Γ, sola recta Η Α satisfacit problemati. Si vero minor fuerit eâ, non componetur. Quod si major fuerit eâ, demonstratum est in præmissis, unam solam rectam ipsi Ξ Μ occurrentem solvere problema.

Cas. V.

Cas. V. Ducatur, juxta modum quintum, recta AB auferens à rectis ΓA, ZB rationem ZB ad ΓA datam; ac producatur ea ad punctum Δ. Quoniam data est ratio ZB ad ΘΔ, datur etiam ratio ΘΔ ad ΓA; adeoque recta ΔA positione datur; juxta resolutionem Casus quarti Loci quarti, qui non habet limites. Compositio autem manifesta est.

LOCUS SEXTUS.

Incidat jam recta, per puncta H, Z ducta, super ipsum punctum Γ in recta altera sumptum, ut recta HZΓ: ac manifestum est rectas per punctum H duci posse juxta quatuor modos.

Cas. I. Ducatur autem imprimis recta HB, juxta Casum primum, auferens rationem ZA ad ΓΔ datam, ac producatur ea *ad* Δ. *Quoniam ratio* ZA *ad* ΓB *datur, dabitur etiam ratio* ΓB ad ΓΔ, adeoque recta BΔ positione datur, per ea quæ demonstrantur in Casu primo Loci tertii Lib. I. Oportet autem rationem datam minorem esse ratione KZ ad ΓN. Ducatur enim recta *ipsi* MZK parallela, ut HN, ac producatur utraque HK, ΓB ad Θ. Quoniam autem ratio ΘΓ ad ΓB major est ratione ΘB ad ΓB; ac ΘΓ est ad ΓB sicut KZ ad ZA; atque etiam ΘB est ad BΓ ut ΘH ad ΓΔ; recta vero ΘH æqualis est ipsi ΓN: ratio igitur KZ ad ZA major erit ratione ΓN ad ΓΔ. Permutando autem, ratio KZ ad ΓN major erit ratione ZA ad ΓΔ. Oportet itaque rationem ad componendum datam minorem esse ratione KZ ad ΓN.

Compo-

Componetur autem problema in hunc modum. Esto ratio proposita sicut Κ ad Λ, quæ minor sit ratione ΚΖ ad ΓΝ. Fiat ut ΖΗ ad ΓΗ ita Κ ad Ο; cumque ΖΗ est ad ΓΗ sicut ΚΖ ad ΚΜ, erit etiam ΖΚ ad ΚΜ sicut Κ ad Ο. Sed recta ΚΜ æqualis est ipsi ΗΝ: quare ΖΚ est ad ΗΝ sicut Κ ad Ο; ac invertendo Ο erit ad Κ sicut ΗΝ ad ΚΖ. Ratio autem Κ ad Λ minor est ratione ΚΖ ad ΓΝ; igitur *ex æquo* ratio Ο ad Λ minor erit ratione ΗΝ ad ΝΓ. Quocirca si fiat ut Ο ad Λ ita ΗΝ ad ΝΔ, major erit illa quam recta ΝΓ. Junctâ autem ΗΔ, dico rectam ΗΔ solvere problema. Etenim Κ est ad Ο ut ΖΗ ad ΗΓ, ac ΖΗ est ad ΗΓ sicut ΖΑ ad ΒΓ; adeoque ΖΑ est ad ΒΓ ut Κ ad Ο. Sed ΝΗ est ad ΝΔ, hoc est ΒΓ ad ΓΔ, sicut Ο ad Λ: igitur ex æquo erit ΖΑ ad ΓΔ sicut Κ ad Λ; adeoque recta ΗΔ solvit problema. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur jam, juxta modum secundum, recta ΗΑ auferens rationem ΒΖ ad ΓΑ datam. Producatur ea ad punctum Δ. Quoniam autem ratio ΒΖ ad ΓΔ datur, data est quoque ratio ΓΔ ad ΓΑ; quapropter recta ΗΔ positione datur: reducitur enim ad Casum secundum Loci tertii. Determinatio autem hæc est. Juncta ΗΜ producatur ad Ε, ac dico quod recta ΗΜ auferet rationem ΖΜ ad ΜΓ *majorem* quavis ratione quam resecant rectæ per Η ductæ ipsique ΓΜ occurrentes. Ductâ enim rectâ ΗΔ; cum rectæ propiores puncto Γ abscindunt semper rationes minores, quam quæ auferuntur à remotioribus ab eo: manifestum est rationem ΕΓ ad ΓΜ *majorem* esse ratione ΔΓ ad ΓΑ; ac permutando, rationem ΕΓ ad ΓΔ *majorem* esse ratione ΜΓ ad ΓΑ. Sed ΕΓ est ad ΓΔ sicut ΜΖ ad ΖΒ; adeoque ratio ΜΖ ad ΖΒ *major* erit ratione ΜΓ ad ΓΑ. Permutando autem ratio ΜΖ ad ΓΜ *major* erit ratione ΖΒ ad ΓΑ; quare recta ΗΜ aufert rationem ΖΜ ad ΜΓ *majorem* quavis ratione quam auferant rectæ per Η ductæ, totique rectæ ΓΜ occurrentes.

Componetur autem problema ad hunc modum. Maneant jam descripta, ac juncta ΗΜ producatur ad Ε. Recta hæc

HM auferet rationem ZM ad MΓ, * *majorem* quacunque ratione quam resecant rectæ quævis aliæ per H ductæ, totique rectæ ΓM occurrentes. Si igitur ratio proposita æqualis fuerit rationi ZM ad MΓ, sola recta HM solvit problema. Si *major* fuerit data ratio, non componi potest. Quod si *minor* fuerit eâ, patet quod, juxta Casum prædictum, duci possit recta, quæ occurrens rectæ ΓM solvat problema. Q. E. D.

Cas. III. Ducatur, juxta modum tertium, recta HA auferens rationem ZA ad ΓB datam, ac producatur ea ad punctum Δ. Quoniam ratio AZ ad ΓΔ datur, ratio ipsius BΓ ad ΓΔ etiam data est: unde recta HΔ positione datur. Reducitur enim ad eundem Casum cum problemate præcedente. Determinatur autem hunc in modum. Junge HM, quæ producatur ad E. Cum autem rectæ propiores puncto Γ auferunt semper rationes * *minores* quam quæ resecantur à remotioribus ab eo (per nuper demonstratas limitationes) constat rectam HM auferre rationem ZM ad MΓ *minorem* quavis aliâ à rectis per punctum H ductis, totique rectæ MB occurrentibus, abscissis.

Sic autem componetur problema. Manentibus descriptis, jungatur HM que producatur ad E: recta hæc HM auferet rationem MZ ad ΓM, *minorem* quavis ratione, à qualibet aliâ per H ductâ, totique MB occurrente, abscisâ. Si igitur proponatur ratio componenda quæ æqualis sit rationi ZM ad MΓ; sola recta HM satisfacit problemati. Quod si *minor* fuerit eâ, non componetur. Si vero * *major* fuerit, manifestum est ex limitationibus præmissis rectam problema solventem occurrere ipsi MB. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur, juxta Casum quartum, recta AHB aufe-

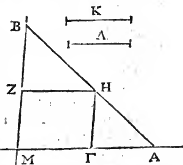
* *In Cas.* II. *&* III. *ubique fere contrarium habet MS. Codex, manifestâ mendâ.*

rens rationem BZ ad ΓA datam. Producatur ea ad Δ. Datâ autem ratione BZ ad ΓΔ, datur quoque ratio ΓΔ ad ΓA: jam rectæ duæ ΓA, ΓΔ dantur positione; ac in utrâque earum sumitur punctum Γ; punctum autem datum H est intra angulum AΓΔ. Ducenda est igitur recta AΔ, juxta Casum tertium Loci tertii, auferens rationem ΓΔ ad ΓA datam; adeoque recta AΔ datur positione, (per ea quæ in prædicto casu demonstrantur) neque habet determinationem.

Componetur autem problema hunc in modum. Maneant descripta, ac sit ratio data sicut N ad Ξ. Fiat ut HZ ad ΓH ita N ad O. Jam dantur positione rectæ duæ ΓA, ΓΔ invicem occurrentes in puncto Γ; punctum autem datum H est intra angulum AΓΔ. Ducatur itaque recta AΔ (per Casum tertium Loci tertii) quæ auferat rationem ΓΔ ad ΓA æqualem rationi O ad Ξ; ac manifestum est rectam AΔ satisfacere problemati.

LOCUS SEPTIMUS.

Sit jam punctum datum H intra angulum AMB; ac ducantur per H rectæ duæ parallelæ rectis datis AM, MB, ut ΓH, HZ; quæ occurrant ipsis datis in punctis Γ & Z. Ac manifestum est quod rectæ duci possint per punctum H juxta tres Casus.



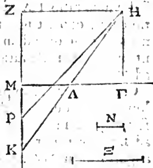
Cas. I. Ducatur autem imprimis recta AB, ad modum primum, auferens rationem ZB ad AΓ datam. Quoniam ZB est ad AΓ ut rectangulum ZB in AΓ ad quadratum ex AΓ; data est ratio rectanguli BZ in AΓ ad quadratum ex AΓ. Sed rectangulum BZ in AΓ datur, quia æqualis est rectangulo ZH in HΓ; adeoque recta ΓA datur. Dato autem puncto

Γ,

Γ, punctum A etiam datur: ac ob datum punctum H recta AB positione datur. Q. E. I.

Componetur autem problema ad hunc modum. Maneant descripta, ac sit ratio proposita sicut K ad Λ. Fiat ut K ad Λ ita rectangulum HZ in HΓ ad quadratum ex ΓA; ac juncta recta HA producatur ad B: dico rectam AB satisfacere problemati. Quoniam enim rectangulum ΓH in HZ est ad quadratum ex ΓA ut K est ad Λ, ac rectangulum ZB in ΓA æquale est rectangulo ΓH in HZ; erit rectangulum ZB in ΓA ad quadratum ex ΓA ut K ad Λ: adeoque erit ZB ad ΓA sicut K ad Λ. Recta igitur AB solvit problema. Q. E. D.

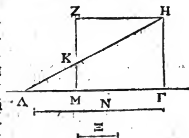
Cas. II. Ducatur, juxta Casum secundum, recta HK auferens rationem ΓA ad KZ datam. Quoniam ratio ΓA ad KZ datur, data erit ratio rectanguli ΓA in KZ ad quadratum ex KZ. Sed rectangulum ΓA in KZ æquale est rectangulo ΓM in MZ, adeoque ratio rectanguli ΓM in MZ ad quadratum ex KZ datur. Rectangulum autem ΓM in MZ datur, ob cognitam utramque rectam; quadratum igitur ex KZ datum est, adeoque & ipsa KZ datur magnitudine & positione: ac dato puncto Z punctum K datur, unde & ipsa KH *positione datur*. Quoniam autem recta MΓ major est ipsâ ΓA, ac recta MZ minor est quam KZ; erit ratio MΓ ad ΓA major ratione MZ ad ZK; ac permutando, ratio MΓ ad MZ major erit ratione ΓA ad ZK. Sed ratio ΓA ad ZK est ratio data: oportet igitur rationem construendam minorem esse ratione ΓM ad MZ.



Componetur autem problema in hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut N ad Ξ, minor ratione ΓM ad MZ. Quoniam autem ratio ΓM ad MZ major est ratione N ad Ξ, ratio rectanguli ΓM in MZ ad quadratum ex MZ major erit ratione N ad Ξ. Ponatur igitur ut N ad Ξ ita rectangulum ΓM ad MZ ad rectangulum aliud; quod proinde majus erit quadrato ex MZ, nempe æquale quadrato ex KZ. Dico quod recta KH solvit problema; sive quod ΓA est ad KZ ut N ad Ξ. Etenim ut N est ad Ξ ita rectangulum ΓM in MZ ad quadratum ex KZ. Sed rectangulum ΓM in MZ

æquale est rectangulo ΓΛ in ΚΖ; adeoque erit ut Ν ad Ξ ita rectangulum ΓΛ in ΚΖ ad quadratum ex ΚΖ, hoc est, ita ΓΛ ad ΚΖ. Recta igitur ΚΗ solvit problema; ac dico quod ea sola. Nam si ducatur recta alia, ut ΗΡ; manifestum est illam satisfacere problemati, hanc vero non item.

Cas. III. Manentibus quæ prius, ducatur recta ΗΚΛ, juxta modum tertium, auferens rationem ΓΛ ad ΚΖ datam. Quoniam ratio ΓΛ ad ΚΖ data est, dabitur quoque ratio rectanguli ΓΛ in ΚΖ ad quadratum ex ΚΖ. Sed rectangulum ΓΛ in ΚΖ æquale est rectangulo ΓΜ in ΜΖ: quare ratio ΓΜ in ΜΖ ad quadratum ex ΚΖ datur. Rectangulum autem ΓΜ in ΜΖ datum est, ob datam utramque ΓΜ, ΜΖ; adeoque quadratum ex ΚΖ datur, atque ipsa ΚΖ tam magnitudine quam positione; ac dato puncto Ζ, punctum Κ datur. Recta igitur ΚΗΛ positione datur. Cum autem recta ΓΛ major est quam ΓΜ, ac ΚΖ minor quam ΖΜ; ratio ΓΛ ad ΓΜ major erit ratione ΚΖ ad ΖΜ; & permutando ratio ΓΛ ad ΚΖ major erit ratione ΓΜ ad ΖΜ. Est autem ratio ΓΛ ad ΚΖ ratio data; oportet igitur rationem ad componendum propositam majorem esse ratione ΓΜ ad ΜΖ.



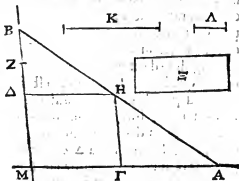
Componetur autem problema hunc in modum. Iisdem descriptis, sit ratio data sicut Ν ad Ξ; quæ major sit ratione ΓΜ ad ΜΖ, sive ratione rectanguli ΓΜ in ΜΖ *ad quadratum ex* ΜΖ. Fiat igitur ut Ν ad Ξ ita rectangulum ΓΜ in ΜΖ ad rectangulum aliud; quod minus erit quadrato ex ΜΖ. Sit autem illud æquale quadrato ex ΚΖ; ac juncta ΗΚ producatur ad Λ. Dico rectam ΗΛ solvere problema, sive quod ΓΛ est ad ΚΖ sicut Ν ad Ξ. Quoniam enim rectangulum ΓΜ in ΜΖ est ad quadratum ex ΚΖ ut Ν ad Ξ; ac rectangulum ΓΜ in ΜΖ æquale est rectangulo ΓΛ in ΚΖ: erit rectangulum ΓΛ in ΚΖ ad quadratum ex ΚΖ, hoc est ΓΛ ad ΚΖ, sicut Ν ad Ξ. Recta igitur ΗΛ solvit problema, eaque sola. Nam si ducatur recta alia, illa quidem satisfacit problemati, altera vero non item.

LOCUS

LOCUS OCTAVUS.

Cadat jam recta per punctum H ducta, rectæque ZM parallela, super ipsum punctum Γ; quæ vero alteri rectæ MA parallela ducitur, cadat citra punctum Z, ut HΔ. Ac manifestum est rectas duci posse per punctum H secundum quatuor formas.

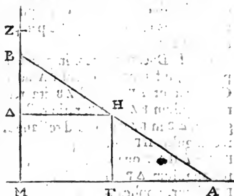
Cas. I. Ducatur autem imprimis recta AHB, juxta modum primum, auferens rationem ΓA ad ZB æqualem rationi datæ. Quoniam ut AΓ est ad ZB ita rectangulum AΓ in ΔB ad rectangulum BZ in ΔB, ratio rectanguli AΓ in ΔB ad rectangulum ΔB in BZ datur. Sed rectangulum AΓ in ΔB æquale est rectangulo HΓ in ΓM *vel* HΔ: quare rectangulum ΔB in BZ datur, applicandum ad rectam datam ΔZ excedens quadrato; adeoque recta BZ datur, ipsumque punctum B datum. Dato autem puncto H, recta AHB positione data est.



Componetur autem hunc in modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut K ad Λ. Fiat ut K ad Λ ita rectangulum HΓ in HΔ ad rectangulum Ξ; & applicetur ad rectam ΔZ rectangulum æquale rectangulo Ξ excedens quadrato. Sit illud rectangulum ΔB in BZ. Jungatur HB ac producatur ad A: dico rectam AB solvere problema. Quoniam enim K est ad Λ ut rectangulum ΓH in HΔ ad rectangulum Ξ; ac rectangulum Ξ æquale est rectangulo ΔB in BZ, uti rectangulum ΓH in HΔ æquale est rectangulo ΔB in AΓ: erit itaque rectangulum ΔB in AΓ ad rectangulum ΔB in BZ, hoc est, AΓ ad BZ, sicut K ad Λ. Recta igitur AB solvit problema. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur jam recta AB, juxta modum secundum, auferens rationem AΓ ad BZ datam. Ob datam rationem AΓ ad BZ, data quoque est ratio rectanguli AΓ in BΔ ad rectangulum BZ in BΔ. Rectangulum autem AΓ in BΔ datur,

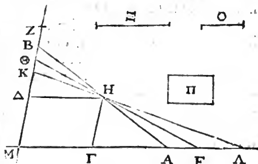
tur, quia æquale est rectangulo Γ H in H Δ: adeoque rectangulum B Z in B Δ datum est. Applicando itaque ad rectam Δ Z rectangulum illud deficiens quadrato, habebitur recta Δ B. Datis autem punctis H, B, recta A B positione datur. Quoniam autem requiritur ut fiat, in ratione ad componendum proposita, rectangulum Γ H in H Δ ad rectangulum aliud; & ut applicetur ad rectam Δ Z rectangulum æquale huic rectangulo deficiens quadrato: fieri non potest ut applicetur ad quamvis rectam datam rectangulum datum deficiens quadrato. Impossibile est igitur producere rectam lineam ad punctum A, quæ auferat à quibuslibet duabus rectis segmenta quæ sint inter se in ratione data.



Hoc autem determinatur in hunc modum. Manentibus quæ prius, secetur recta Δ Z bifariam in puncto Θ; ac jungatur Θ H quæ producatur ad E. Dico rectam Θ E auferre rationem Γ E ad Θ Z, minorem quâvis ratione à qualibet aliâ rectâ per H ductâ, totique Δ Z occurrente, abscissâ. Ducatur enim alia ut A B. Quoniam recta Δ Θ æqualis est ipsi Θ Z, erit rectangulum Θ Δ in Θ Z majus rectangulo Z B in B Δ. Rectangulum autem E Γ in Δ Θ æquale est rectangulo A Γ in B Δ, quia utrumque æquale est rectangulo Γ H in H Δ. Ratio igitur rectanguli E Γ in Δ Θ ad rectangulum Θ Δ in Θ Z minor est ratione rectanguli A Γ in B Δ ad rectangulum Z B in B Δ. Sed rectangulum E Γ in Δ Θ est ad rectangulum Δ Θ in Θ Z ut E Γ ad Z Θ; ac rectangulum A Γ in B Δ est ad rectangulum Δ B in B Z ut A Γ ad B Z: ratio igitur E Γ ad Z Θ minor est ratione A Γ ad B Z. Quocirca recta E Θ aufert rationem E Γ ad Θ Z, minorem quavis ratione quam abscindit recta quæcunque alia per H ducta, totique rectæ Z Δ occurrens.

Componetur autem problema in hunc modum. Manentibus descriptis, dividatur recta Δ Z bifariam in puncto Θ, ac jungatur

jungatur ΗΘ ad punctum Ε producenda. Hæc recta ΘΕ auferet rationem ΓΕ ad ΘΖ minorem qualibet ratione quam abscindere potest alia quævis recta per Η ducta totique ΔΖ occurrens. Jam si ratio ad componendum data æqualis fuerit rationi ΓΒ ad ΘΖ, sola recta ΕΘ solvit problema. Si ratio minor fuerit eâ, componi non potest. Quod si ratio proposita major fuerit ratione ΕΓ ad ΘΖ, ut Ξ ad Ο; fiat ut Ξ ad Ο ita rectangulum ΓΗ in ΗΔ (æquale rectangulo ΕΓ in ΔΘ) ad rectangulum Π. Quoniam vero ratio Ξ ad Ο major est ratione ΕΓ ad ΘΖ,

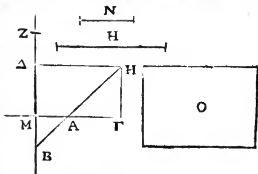


erit ratio rectanguli ΕΓ in ΔΘ ad rectangulum Π major ratione ΕΓ ad ΘΖ. Sed ΕΓ est ad ΘΖ ut rectangulum ΕΓ in ΔΘ ad rectangulum ΘΖ in ΔΘ; adeoque ratio rectanguli ΕΓ in ΔΘ ad rectangulum Π major est ratione rectanguli ΕΓ in ΔΘ ad rectangulum ΔΘ in ΘΖ: unde rectangulum Π minus erit rectangulo ΔΘ in ΘΖ. Possibile est igitur applicare ad rectam ΔΖ rectangulum æquale rectangulo Π deficiens quadrato. Fiet autem applicatio ista duobus modis, ita ut puncta applicationum fuerint Β & Κ. Jungantur ΒΗ, ΚΗ quæ producantur ad Α & Λ. Dico utramque rectam ΑΒ, ΚΛ solvere problema. Quoniam enim rectangulum ΓΗ in ΗΔ est ad rectangulum Π ut Ξ ad Ο; ac rectangulum ΓΗ in ΗΔ æquale est rectangulo ΓΛ in ΔΚ; uti rectangulum Π æquale est rectangulo ΔΚ in ΚΖ; erit rectangulum ΓΛ in ΔΚ ad ΔΚ in ΚΖ, hoc est ΓΛ ad ΔΚ, ut Ξ ad Ο. Recta igitur ΛΚ satisfacit problemati. Ac pari argumento demonstratur rectam ΑΒ idem præstare. Constat itaque duobus modis componi posse problema. Q. E. D.

Cas. III. Ducatur recta ΗΒ, juxta Casum tertium, auferens rationem ΓΑ ad ΒΖ datam. Quoniam ratio rectanguli ΓΑ in ΒΔ ad rectangulum ΒΖ in ΒΔ data est, atque etiam rectangulum ΒΔ in ΓΑ datur; *datum quoque erit rectangulum* ΒΖ *in* ΒΔ, applicandum ad rectam ΔΖ excedens quadrato,

drato, ut habeatur recta ΒΔ, punctumque Β datum. Ad compositionem autem requiritur rationem propositam minorem esse ratione ΓΜ ad ΜΖ Nam recta ΜΓ major est quam ΓΑ, ac ΜΖ minor est quam ΒΖ, adeoque ratio ΓΜ ad ΓΑ major erit ratione ΜΖ ad ΒΖ; ac permutando ratio ΓΜ ad ΜΖ major erit ratione ΓΑ ad ΒΖ. Sed ratio ΓΑ ad ΒΖ est ratio data: quare oportet ad constructionem quod ratio data minor sit ratione ΓΜ ad ΜΖ.

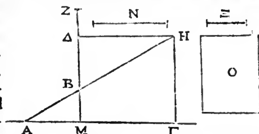
Componetur autem problema ad hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data, quæ minor sit ratione ΓΜ ad ΜΖ, sicut Ν ad Ξ: ac fiat ut Ν ad Ξ ita rectangulum ΓΗ in ΗΔ (æquale rectangulo ΓΜ in ΜΔ) ad rectangulum Ο. Est autem ratio Ν ad Ξ minor ratione ΓΜ ad ΜΖ; quare ratio rectanguli ΓΜ in ΜΔ ad rectangulum Ο minor erit ratione ΓΜ ad ΜΖ. Sed ΓΜ est ad ΜΖ ut rectangulum ΓΜ in ΜΔ ad rectangulum ΖΜ



in ΜΔ: quare rectangulum Ο majus erit rectangulo ΖΜ in ΜΔ. Si igitur applicetur ad rectam ΖΔ rectangulum ipsi Ο æquale excedens quadrato, punctum Β cadet ab alterâ parte puncti Μ; adeoque si fiat rectangulum ΖΒ in ΒΔ rectangulo Ο æquale, ac jungatur recta ΗΒ: dico rectam ΗΒ solvere problema. Quoniam enim Ν est ad Ξ ut rectangulum ΓΗ in ΗΔ ad rectangulum Ο; ac rectangulum Ο æquale est rectangulo ΖΒ in ΒΔ: erit Ν ad Ξ ut rectangulum ΓΗ in ΗΔ ad rectangulum ΖΒ in ΒΔ. Sed rectangulum ΓΗ in ΗΔ æquale est rectangulo ΑΓ in ΒΔ; adeoque Ν est ad Ξ ut rectangulum ΑΓ in ΒΔ ad rectangulum ΖΒ in ΒΔ. Rectangulum autem ΑΓ in ΒΔ est ad rectangulum ΖΒ in ΒΔ ut ΑΓ ad ΖΒ. Ergo ΑΓ est ad ΖΒ ut Ν ad Ξ, ac recta ΗΒ solvit problema. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur, juxta Casum quartum, recta ΗΑ auferens rationem ΓΑ ad ΖΒ datam. Quoniam ratio rectanguli ΓΑ in ΒΔ ad rectangulum ΖΒ in ΒΔ datur; ac rectangu-

lum ΓA in BΔ æquale est rectangulo ΓH in HΔ: igitur rectangulum ZB in BΔ datur, applicandum ad rectam datam ΔZ excedens quadrato; unde recta BΔ datur. Ob datum autem punctum H, recta HB positione datur. Oportet vero rationem ad construendum propositam majorem esse ratione ΓM ad MZ. Nam recta ΓA major est quam ΓM, ac BZ minor est quam recta MZ; adeoque ratio ΓA ad ΓM major erit ratione BZ ad MZ. Permutando autem ratio ΓA ad BZ major erit ratione ΓM ad MZ.



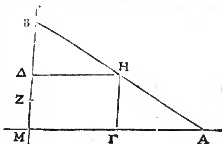
Sed ratio AΓ ad BZ est ratio data, quæ proinde major esse debet ratione ΓM ad MZ.

Sic autem componetur problema hoc. Maneant quæ prius, ac sit ratio data sicut N ad Ξ, quæ major sit ratione ΓM ad MZ. Fiat ut N ad Ξ ita rectangulum ΓH in HΔ (æquale rectangulo ΓM in MΔ) ad rectangulum O. Jam ratio N *ad* Ξ major est ratione ΓM ad MZ, ac ratio N ad Ξ est ut rectangulum ΓM in ΔM ad rectangulum O; ratio autem ΓM ad MZ est ut rectangulum ΓM in MΔ ad rectangulum MΔ in MZ. Ratio igitur rectanguli ΓM in MΔ ad rectangulum O major est ratione rectanguli ΓM in MΔ ad rectangulum ZM in MΔ; adeoque rectangulum O minus erit rectangulo ZM in MΔ. Si itaque applicetur ad rectam ZΔ rectangulum æquale rectangulo O excedens quadrato, punctum applicationis B cadet citra punctum M. Sit rectangulum O æquale rectangulo ZB in BΔ, ac juncta HB producatur ad A. Dico rectam HA solvere problema. Quoniam enim rectangulum ΓH in HΔ, hoc est rectangulum ΓA in BΔ, est ad rectangulum ZB in BΔ ut N est ad Ξ; ac rectangulum ΓA in BΔ est ad ZB in BΔ ut ΓA ad ZB: erit igitur ΓA ad BZ sicut N ad Ξ. Q. E. D.

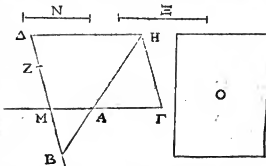
LOCUS NONUS.

Cadat jam altera è duabus parallelis extra punctum Z, ad modum rectæ HΔ, ac manifeſtum eſt quod habebuntur quatuor Caſus, hoc eſt, quod duci poſſunt rectæ per punctum H ſecundum quatuor modos.

Caſ. I. Ducatur autem recta BA, juxta Caſum primum, auferens rationem AΓ ad BZ datam. Quoniam rectangulum AΓ in BΔ datur, rectangulum quoque ZB in BΔ datur, applicandum ad rectam datam ZΔ excedens quadrato; recta igitur BΔ ac punctum B dantur: unde recta AHB poſitione datur. Conſtructio autem problematis manifeſta eſt ex præmiſſis.

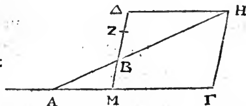


Caſ. II. Ducatur jam juxta Caſum ſecundum, recta HB auferens rationem ΓA ad BZ datam. Quoniam ratio rectanguli AΓ in BΔ ad rectangulum BΔ in BZ data eſt, ac rectangulum ipſum AΓ in BΔ datum; ideo rectangulum BΔ in BZ datur, applicandum ad rectam datam ΔZ excedens quadrato; unde punctum B datur. Dato autem puncto H, recta AHB poſitione datur. Oportet autem rationem ad componendum datam minorem eſſe ratione ΓM ad MZ. Quoniam enim ΓM major eſt ipsâ ΓA, & MZ minor ipsâ ZB, *erit ratio* ΓM *ad* ΓA *major ratione* MZ *ad* ZB, ac permutando ratio ΓA ad ZB minor erit ratione ΓM ad MZ. Componetur autem ad hunc modum problema. Manentibus quæ prius, eſto ratio data ſicut N ad Ξ, quæ ſit minor ratione ΓM ad MZ. Fiat ut N ad Ξ ita rectangulum HΓ in HΔ, ſive rectangulum MΓ in MΔ, ad rectangulum



gulum O. Quoniam autem ratio N ad Ξ minor est ratione ΓM ad MZ; ac ΓM est ad MZ ut rectangulum ΓM in MΔ ad rectangulum MΔ in MZ, igitur ratio rectanguli ΓM in MΔ ad rectangulum O minor erit ratione rectanguli ΓM in MΔ ad rectangulum ΔM in MZ, *adeoque rectangulum* O *majus erit rectangulo* ΔM *in* MZ. Applicetur itaque ad rectam ΔZ rectangulum æquale rectangulo O excedens quadrato, sitque illud rectangulum ΔB in BZ; *& punctum* B *cadet ultra punctum* M. Ac manifestum est rectam HB satisfacere problemati.

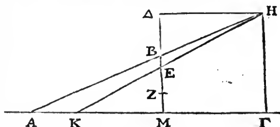
Cas. III. Ducatur, juxta Casum tertium, recta HA auferens rationem ΓA *ad* BZ *datam. Quoniam ratio rectanguli* BZ *in* BΔ *ad rectangulum* ΓA in BΔ datur, ac rectangulum ΓA in BΔ datum est, ipsum quoque rectangulum BZ in BΔ datur, applicandum ad rectam ΔZ excedens quadrato; unde punctum B datur, ac ob datum punctum H recta HA positione datur. Oportet autem rationem ad componendum datam majorem esse ratione ΓM ad MZ. Quoniam enim ratio AΓ ad ΓM major est ratione BZ ad ZM, permutando erit ratio AΓ ad BZ major ratione ΓM ad MZ. Est vero ratio AΓ ad BZ ratio data; quare manifestum est oportere



rationem datam majorem esse ratione ΓM ad MZ. Constat autem ex præmissis quo pacto fieri possit constructio.

Cas. IV. Ducatur jam recta HA, juxta Casum quartum, auferens rationem ΓA ad BZ datam. Quoniam ratio rectanguli ΓA in BΔ ad rectangulum ZB in BΔ datur, ac rectangulum ΓA in BΔ datum est; igitur rectangulum ZB in BΔ datur. Applicando itaque rectangulum illud ad rectam ZΔ deficiens quadrato, dabitur punctum B. Dato autem puncto H, ipsa ABH positione datur. Determinatur autem hunc in modum. Maneant descripta, & dividatur recta ZΔ bifariam in puncto B; ac juncta HB producatur ad A: dico rectam HA auferre rationem ΓA ad BZ, minorem quavis ratione quam resecant rectæ quælibet aliæ per H ductæ, totique rectæ ΔZ occurrentes. Ducatur enim recta alia ut

HEK. Quoniam vero recta ZB æqualis est ipsi BΔ, erit rectangulum ZB in BΔ majus rectangulo ZE in EΔ. Sed rectangulum ΓA in BΔ æquale est rectangulo ΓK in EΔ, (quia utrumque æquale est rectangulo ΓH in HΔ) Igitur ratio rectanguli ΓA in BΔ ad rectangulum ZB in BΔ minor est ratione rectanguli ΓK in

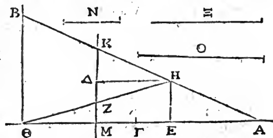


EΔ ad rectangulum ZE in EΔ. Sed rectangulum ΓA in BΔ est ad rectangulum ZB in BΔ, ut ΓA *ad* ZB; *ac rectangulum* ΓK *in* EΔ *ad rectangulum* ZE *in* EΔ est ut ΓK ad ZE. Ratio igitur ΓA ad ZB minor est ratione ΓK ad ZE: adeoque recta ΓA aufert rationem AΓ ad ZB, minorem quavis aliâ à rectâ qualibet per H ductâ, totique rectæ ΔZ occurrente, abscissâ; adeoque habentur limites. Constat autem ex jam traditis, compositionem fieri posse duobus modis, utrinque à recta HA; scilicet rectis BZ, BΔ occurrentibus.

LOCUS DECIMUS.

Cadant jam rectæ duæ, quæ per punctum H ducantur ipsis AM, MK parallelæ, ultra puncta data Z & Γ, ad modum rectarum HΔ, HE. Ac manifestum est rectas duci posse per punctum H, juxta quinque diversos Casus.

Cas. I. Ducatur autem imprimis, juxta modum primum, recta AK auferens rationem KZ ad AΓ datam. Jungatur HZ quæ producatur ad Θ; ac per punctum Θ ducatur recta BΘ ipsi KM parallela. Continuetur etiam recta AHK ad punctum B, in recta ΘB positione

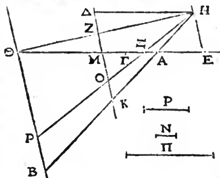


datâ. Quoniam vero ratio ZK ad AΓ datur, atque etiam ratio ZK ad ΘB data est, ratio quoque ΘB ad AΓ datur. Jam

Jam dantur positione rectæ duæ Α Θ, Θ Β; ac sumitur in Α Θ punctum Γ, in ipsâ vero Β Θ punctum Θ; punctum autem datum Η est intra angulum Α Θ Β; ac recta parallela Η Ε cadit ultra punctum Γ. Ducenda est igitur recta, juxta Casum primum *Loci sexti*, auferens rationem Θ Β ad Γ Α datam; quare recta Α Β positione datur per regulas Casus prædicti: qui quidem non habet Diorismum.

Componetur autem problema in hunc modum. Sit ratio data sicut Ν ad Ο. Fiat ut Ζ Η ad Η Θ ita Ν ad Ξ; ac ducatur recta Α Β, ad modum Casus primi Loci sexti, auferens rationem Θ Β ad Α Γ æqualem rationi Ξ ad Ο: ac manifestum est rectam Α Β solvere problema. Q. E. D.

Cas. II. Ducatur jam recta Η Κ, juxta Casum secundum, auferens rationem Κ Ζ ad Α Γ datam. Producatur recta Ζ Η ad Θ, ac per punctum Θ ipsi Κ Μ parallela ducatur recta, quæ occurrat ipsi Η Κ in puncto Β. Quoniam ratio Κ Ζ ad Α Γ datur, atque etiam ratio Κ Ζ ad Β Θ; datur quoque ratio Β Θ ad Α Γ: atque adeo ipsa recta Η Β positione datur, per Casum secundum Loci sexti, qui determinationem habet.



Limitatur autem ad hunc modum. Manentibus descriptis, capiatur recta Θ Α media proportionalis inter ipsas Θ Ε, Θ Γ; ac juncta recta Η Α producatur ad Β. Dico rectam Η Β auferre rationem Κ Ζ ad Γ Α, minorem quavis ratione, à rectis per Η ductis, totique rectæ Γ Α occurrentibus, abscisâ. Ducatur enim alia, ut Η Ρ. Jam quoniam recta Θ Α media proportionalis est inter ipsas Θ Ε, Θ Γ; ac rectæ duæ Β Θ, Ε Θ positione dantur; ac in rectâ Β Θ sumitur punctum Θ, in ipsâ vero Ε Θ punctum Γ; ac recta parallela ipsi Θ Β cadit ultra punctum Γ, nempe recta Η Ε: ratio igitur Θ Β ad Α Γ erit ratio minima, per ea quæ demonstravimus ad Casum secundum Loci sexti. Hinc ratio Θ Β ad Α Γ minor erit ratione Ρ Θ ad Γ Ξ; ac permutando ratio Β Θ ad Θ Ρ minor erit ratione Α Γ ad Γ Ξ. Sed Β Θ est ad Θ Ρ ut Κ Ζ ad Ζ Ο; quare ratio Κ Ζ ad Ζ Ο minor erit ratione Α Γ ad Γ Ξ;

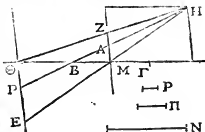
Γ Ξ; ac permutando ratio K Z *ad* A Γ *minor erit ratione* Z O *ad* Γ Ξ. Recta igitur H B aufert rationem K Z ad Γ A minorem quavis ratione, à rectâ qualibet per H ductâ, abscissâ.

Componetur autem problema ad hunc modum. Manentibus descriptis, sit recta Θ A media proportionalis inter E Θ, Θ Γ, ac juncta H A producatur ad B. Recta H K B auferet rationem K Z ad Γ A, minorem qualibet ratione, à rectis per H ductis, totique rectæ Γ A occurrentibus, abscindendâ. Jam si ratio ad componendum proposita æqualis fuerit rationi K Z ad Γ A, sola recta H K B satisfacit problemati. Ac si minor fuerit eâ, non construetur. Si vero ratio major fuerit eâ, constat ex præmissis problema componi posse duobus modis, ab utraque parte rectæ H K; abscissis ex utrâque E A, A Γ segmentis. Esto autem ratio data sicut P ad N, quæ major sit ratione K Z ad Γ A; & fiat ut Z H ad H Θ ita P ad Π; unde P erit ad Π ut K Z ad Θ B. Sed ratio P ad N major est ratione K Z ad Γ A, adeoque ex æquo ratio Π ad N major erit ratione Θ B ad Γ A. Ratio autem Θ B ad Γ A ratio minima est, per Casum secundum Loci sexti; quare duci possunt rectæ duæ ab utraque parte ipsius H B, ut recta H P quæ auferat rationem P Θ ad Γ Ξ æqualem rationi Π ad N: ac manifestum est rectam illam solvere problema. Eodemque modo demonstrabitur rectam alteram tantundem præstare. Q. E. D.

Cas. III. Ducatur jam, ad modum tertium, recta H A K, auferens rationem K Z ad Γ A datam; ac producatur ea ad punctum P. Quoniam ratio K Z ad P Θ datur, etiam ratio P Θ ad Γ A data est; ac proinde recta H P positione datur: resolvitur enim per Casum tertium Loci sexti. Determinatur autem ad hunc modum. Manentibus descriptis, jungatur H M quæ producatur ad B; ac manifestum est oportere rationem Z M ad M P minorem esse ratione ad construendum propositâ, sive ratione K Z ad Γ A. Jam datâ quavis ratione majore quam ratio Z M ad M P, componetur hujusmodi. Manentibus descriptis, sit ratio data, sive ratio P ad N, major ratione

tione ZM ad MΓ; ac fiat ut ZM ad ΘB ita P & Π: & ex æquo constabit rationem ΘB ad MΓ minorem esse ratione Π ad N. Ductâ igitur rectâ per punctum H, quæ auferat ab ipsis PΘ, ΘΓ segmenta, quæ sint inter se in ratione Π ad N; manifestum est illam rectæ ΓM occurrere: quandoquidem rectæ puncto Θ propiores abscindunt semper rationes minores quam quæ auferuntur à remotioribus ab eodem. Si igitur recta HP auferat rationem PΘ ad ΓA æqualem rationi Π ad N, clarum est rectam illam solvere problema. Q. E. D.

Cas. IV. Ducatur jam, juxta Casum quartum, recta HP abscindens rationem AZ ad BΓ datam. Quoniam ratio AZ *ad* PΘ *datur, ratio quoque* PΘ *ad* BΓ data est; adeoque recta HP positione datur: resolvitur enim eodem omnino modo cum præcedente. Sic autem determinatur. Maneant descripta ac jungatur HM quæ producatur ad B; ac manifestum est componi posse problema, si ratio data minor fuerit ratione ZM ad MΓ.

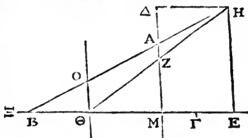


Componetur autem ad hunc modum. Sit ratio data sicut P ad N, quæ minor sit ratione MZ ad MΓ; ac fiat ut ZH ad HΘ, *hoc est* ZM *ad* ΘE, *ita* P ad Π; & ex æquo demonstrabitur rationem ΘE ad ΓM majorem esse ratione Π ad N. Igitur si jubeatur rectam ducere per punctum H, quæ resecet è rectis ΓΘ, ΘE segmenta habentia inter se rationem Π ad N; clarum est rectam illam ipsi MΘ occursuram: quia jam demonstratum est rectas puncto Θ propiores auferre rationes *minores* rationibus, quæ auferuntur à remotioribus ab eodem. Ductâ igitur rectâ HP, quæ auferat rationem PΘ ad ΓB æqualem rationi Π ad N, patet ipsam HAP solvere problema.

Cas. V. Ducatur jam, juxta Casum quintum, recta AB auferens rationem ZA ad ΓB datam. Quoniam ratio ZA ad ΘO data est, atque etiam ratio ΘO ad ΓB; recta quoque HB positione datur. Resolvitur enim per Casum quartum Loci sexti; qui quidem casus limites habet. Determinatur autem hunc in modum. Manentibus descriptis, capiatur media proportionalis inter rectas EΘ, ΘΓ, ut recta ΘB. Junctâ autem

rectâ

rectâ H B, auferet illa rationem Θ O ad B Γ, majorem quavis ratione quam resecant rectæ quælibet aliæ per H ductæ, totique M Ξ occurrentes: unde patet rectam illam H B abscindere etiam rationem Z A ad B Γ, majorem quavis aliâ, à rectâ qualibet ipsi Z Δ occurrente, ablatâ.



Componetur autem problema in hunc modum. Maneant jam descripta, ac fiat recta Θ B media proportionalis inter ipsas E Θ, Θ Γ; ac jungatur H B. Hæc recta H B auferet rationem Z A ad B Γ, majorem quacunque ratione, quam abscindere potest alia quævis per H ducta, totique rectæ Z Δ occurrens. Manifestum autem est, ex jam demonstratis, duobus modis componi posse problema, rectis scilicet ab utrâque parte ipsius H B ducendis, ipsisque A Z, A Δ occursuris. Q. E. D.

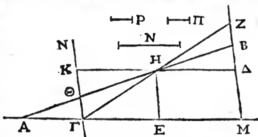
LOCUS UNDECIMUS.

Incidant jam rectæ duæ per punctum H ductæ, ipsisque Z M, M Γ parallelæ, citra puncta data Z & Γ, ad modum ipsarum H E, Δ H; junctisque punctis Z & H producatur recta H Z in directum. Cadet autem illa vel super ipsum punctum Γ, vel ultra, vel citra illud. Imprimis autem cadat super illud; ac patet rectas duci posse per punctum H, secundum quatuor diversos modos.

Cas. I. Ducatur recta A B, juxta Casum primum, auferens rationem B Z ad Γ A *datam*: & agatur per H recta H E ipsi M Z parallela. Jam quoniam ratio B Z ad Γ A datur, atque etiam ratio B Z ad Γ Θ data est, quæ nempe æqualis est rationi Z H ad H Γ; ipsa quoque ratio Γ Θ ad Γ A datur. Habentur autem rectæ duæ positione datæ, viz. A M, Γ N; ac in utrâque earum sumitur commune punctum Γ; & punctum datum H est intra angulum M Γ N. Ducenda est igitur recta B H A auferens datam rationem Θ Γ ad Γ A. Recta autem A B positione datur per Casum primum Loci tertii, qui determinationem habet. Oportet enim rationem componendam minorem esse ratione Δ Z ad B Γ. Producatur recta Δ H ad K,

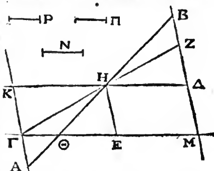
2 Quo-

Quoniam vero ratio HE ad EΓ major est ratione ejusdem HE ad EA; ac HE ad EA est ut ΘΓ ad ΓA: igitur ratio HE ad EΓ major erit ratione ΘΓ ad ΓA. Sed HE æqualis est ipsi ΓK; quare ratio ΓK ad EΓ major erit ratione ΘΓ ad ΓA, ac permutando ratio ΓK ad ΘΓ major erit ratione EΓ ad ΓA. Sed ΓK est ad ΓΘ ut ΔZ ad BZ. Quocirca ratio ΔZ ad BZ major erit ratione EΓ ad ΓA; ac permutando ratio ΔZ ad BΓ major erit ratione BZ ad ΓA. Ratio igitur BZ ad ΓA, nempe ratio data, minor esse debet ratione ΔZ ad EΓ.



Componetur autem problema ad hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut P ad N minor ratione ΔZ ad EΓ: *ac fiat ut* ΓH *ad* HZ *ita* Π *ad* P. Quoniam vero ΓH est ad HZ ut ΓK ad ΔZ, ac, ob EH ipsi ΓK æqualem, ΓK est ad ΔZ ut EH ad ΔZ; erit igitur Π ad P sicut EH ad ΔZ. Sed ratio P ad N minor est ratione ΔZ ad EΓ; quare ex æquo ratio Π ad N minor erit ratione HE ad EΓ. Si itaque fiat ut Π ad N ita HE ad rectam aliam, quæ proinde major erit ipsa EΓ, ut EA; ac jungatur HA, quæ producatur ad B; manifestum est rectam AHB solvere problema. Q.E.D.

Cas. II. Ducatur jam recta ΘB, juxta modum secundum, auferens rationem ZB ad ΓΘ datam; ac producatur ea ad A. Quoniam ratio ZB ad AΓ datur, data quoque est ratio AΓ ad ΓΘ; ac proinde recta AB positione datur; quia reducitur ad Casum secundum Loci tertii, qui limitem habet. Oportet enim rationem construendam majorem esse ratione ΔZ ad EΓ. Producatur recta ΔH ad K. Cumque ratio

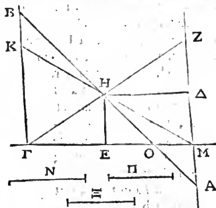


HE ad EΘ, sive AΓ ad ΓΘ, major est ratione HE ad EΓ, hoc est ratione KΓ ad ΓE, erit permutando ratio AΓ ad ΓK major

ratione Γ Θ ad Γ E. Sed A Γ eſt ad Γ K ſicut B Z ad Z Δ; quare ratio B Z ad Z Δ major erit ratione Γ Θ *ad* Γ E, *ac permutando erit ratio* B Z *ad* Γ Θ major ratione Z Δ ad Γ E. Eſt autem ratio B Z ad Γ Θ ratio data; quare ratio illa data major eſſe debet ratione Z Δ ad E Γ.

Componetur autem problema in hunc modum. Manentibus deſcriptis, ſit ratio data ſicut P ad N, major ratione Z Δ ad E Γ; ac fiat ut H Γ ad H Z, *ſive* Γ K *ad* Z Δ, ita Π ad P. Cum autem ratio P ad N major eſt ratione Z Δ ad E Γ, ex æquo erit ratio Π ad N major ratione Γ K ad Γ E, hoc eſt ratione E H ad E Γ. Dantur jam poſitione rectæ duæ, nempe E Γ, Γ A; ac ſumitur in concurſu utriuſque punctum Γ; ac ratio data major eſt ratione E H ad E Γ. Recta igitur ducta, ita ut auferat rationem æqualem rationi Π ad N, *occurret ipſi* Γ E. Hoc autem ſi præſtet recta A B per H ducta, manifeſtum eſt ipſam A Θ B ſatisfacere problemati.

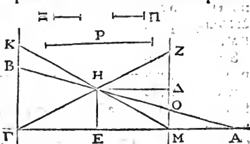
Caſ. III. Ducatur recta A H, juxta Caſum tertium, auferens rationem A Z ad Γ O datam. Producatur ea ad punctum B; ac datâ ratione A Z ad Γ B, ratio quoque Γ B ad O Γ datur; adeoque recta A B poſitione datur, per demonſtrata in Caſu tertio Loci tertii. Determinatio autem manifeſta eſt: nam manentibus deſcriptis, ratio componenda major eſſe debet ratione Z M ad M Γ; quia ratio A Z ad O Γ evidenter major eſt ratione Z M ad M Γ.



Sic autem componetur problema. Iiſdem poſitis, jungatur H M, quæ producatur ad K; ac ſit ratio data ſicut N ad Π major ratione Z M ad M Γ. Fiat ut Z H ad H Γ ita N ad Ξ. Cumque Z H eſt ad H Γ ſicut M Z ad Γ K; ac ratio N ad Π major eſt ratione Z M ad M Γ: patet ex æquo rationem Ξ ad Π majorem eſſe ratione Γ K ad Γ M. Ducatur itaque recta A B, quæ auferat rationem Γ B ad O Γ æqualem rationi Ξ ad Π, & recta illa occurret ipſi E M; quia rectæ propiores puncto Γ abſcindunt ſemper rationes majores quam quæ auferuntur

runtur à remotioribus ab eodem. Constat igitur rectam ΒΗΟΑ solvere problema.

Cas. IV. Ducatur jam recta ΑΗΒ, juxta Casum quartum, auferens rationem ΟΖ ad ΓΑ datam. Quoniam ratio ΟΖ ad ΓΒ data est, ratio quoque ΓΒ ad ΑΓ datur, adeoque recta ΑΒ positione datur. Oportet autem rationem ad componendum datam minorem esse ratione ΖΜ ad ΜΓ, per jam demonstrata.



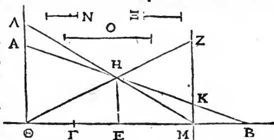
Sic autem componetur problema. Maneant descripta, ac sit ratio data sicut Ξ ad Ρ, minor ratione ΖΜ ad ΜΓ. Jungatur ΗΜ ac producatur ad Κ: dein fiat ut ΖΗ ad ΗΓ ita Ξ ad Π. Est autem ΖΗ ad ΗΓ ut ΜΖ ad ΚΓ; ac ratio ΜΖ ad ΜΓ major est ratione Ξ ad Ρ; quare ex æquo constat rationem ΚΓ ad ΓΜ majorem esse ratione Π ad Ρ. Ducatur igitur recta ΑΗΒ, auferens rationem ΓΒ ad ΑΓ æqualem rationi Π ad Ρ: ac patet rectam illam ΑΒ ipsi ΜΑ occurrere; quia rectæ propiores puncto Γ abscindunt semper rationes majores quam quæ sunt remotiores ab eodem. Manifestum autem est rectam ΑΟΒ solvere problema.

LOCUS DUODECIMUS.

Occurrat jam recta, per puncta Ζ & Η ducta, ipsi ΜΓ, ultra punctum Γ, ad modum rectæ ΖΗΘ: ac manifestum est rectas duci posse per punctum Η juxta quinque Casus.

Cas. I. Ducatur recta ΗΒ, ad formam Casus primi, auferens rationem ΚΖ ad ΒΓ datam. Per punctum Θ ducatur recta ΘΑ ipsi ΜΖ parallela. Jam quia ratio ΖΚ ad ΘΑ, (quæ nempe æqualis est rationi ΖΗ ad ΗΘ) data est; ratio quoque ipsius ΘΑ ad ΒΓ datur. Dantur autem positione rectæ duæ ΘΒ, ΘΑ; ac in recta ΘΑ sumitur punctum Θ, in recta vero ΘΒ sumitur punctum Γ; & punctum datum Η est intra angulum ΑΘΜ; recta autem parallela per Η ducta, nempe ΗΕ, cadit citra punctum Γ. Ducenda est igitur recta

A B auferens rationem Λ Θ ad B Γ datam; quæ quidem recta A B dabitur positione, juxta ostensa in Casu primo Loci sexti. Constat autem rationem componendam minorem esse debere ratione Z M ad M Γ; quia recta K Z minor est quam ZM, & Γ B major quam Γ M.

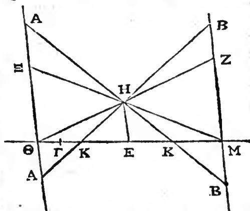


Sic autem componetur. Maneant descripta, & sit ratio data sicut N ad O minor ratione Z M ad M Γ. Jungatur M H quæ producatur ad Λ, ac fiat ut Z H ad H Θ, hoc est Z M ad Λ Θ, ita N ad Ξ; quare N est ad Ξ sicut Z M ad Θ Λ. Sed ratio N ad O minor est ratione Z M ad M Γ; adeoque ex æquo erit ratio Ξ ad O minor ratione Λ Θ ad M Γ. Invertendo autem ratio O ad Ξ major erit ratione M Γ ad Θ Λ. Itaque si faciamus ut O ad Ξ ita M Γ ad rectam aliam, minor erit illa quam Θ Λ. Esto autem illa recta Θ A, ac juncta H A producatur ad B. Manifestum autem est quod, si velimus ducere per punctum H rectam resecantem è rectis Θ Λ, B Γ, (per Casum primum Loci sexti Lib. I.) segmenta quæ sint inter se in ratione Ξ ad O; recta illa occursura sit ipsi B M: quia rectæ propiores puncto Γ semper auferunt rationes majores quam rectæ remotiores ab eodem. Ductâ igitur rectâ A B auferente rationem A Θ ad Γ B æqualem rationi Ξ ad O, clarum est hanc rectam solvere problema.

Cas. II. Ducatur jam recta H B, juxta Casum secundum, auferens rationem Z B ad Γ K datam. Quoniam ratio Z B ad A Θ datur, data quoque est ratio A Θ ad Γ K, unde recta A B positione datur, per eundem Casum cum præcedente. Oportet autem rationem componendam majorem esse ratione Z M ad M Γ. Componetur problema, si manentibus descriptis, jungatur H M quæ producatur ad Ξ, ac fiat omnino ut in præcedente Casu.

Cas. III. Ducatur recta H B, juxta Casum tertium, auferens rationem Z B ad K Γ datam, ac producatur ea ad punctum A. Quoniam ratio Z B ad A Θ datur, atque etiam ratio

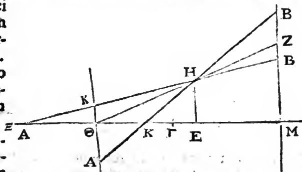
ZB ad KΓ datur, ratio quoque AΘ ad KΓ data erit: unde ipsa recta AB positione datur, per resolutionem Casus secundi Loci sexti, qui quidem Diorismum habet. Determinatur autem hunc in modum. Maneant descripta, & capiatur ΘK media proportionalis inter ipsas ΘB, ΘΓ; ac juncta HK producatur ad A. Hæc recta HA auferet rationem ΘA ad ΓK minorem quavis ratione, à rectâ qualibet aliâ per H ductâ, totique rectæ



EΓ occurrente, abscissâ. Patet etiam rectam BK abscindere rationem ZB ad KΓ, minorem quavis aliâ à rectis ipsi EΓ occurrentibus auferendâ. Juxta præscriptum autem horum limitum componendum est problema: quod quidem fiet duobus modis, ab utrâque scilicet parte rectæ BK, resectis segmentis ex utrisque EK, KΓ.

Cas. IV. Ducatur jam recta AB, ad modum quartum, abscindens rationem ZB ad KΓ datam. Ducatur recta per punctum Θ ipsi MZ parallela, ac ratio ZB ad ΘA data erit: ob datam autem rationem ZB ad KΓ, *data quoque est ratio* ΘA *ad* KΓ, adeoque recta AB positione datur, per regulas Casus tertii Loci sexti, qui non habet determinationem.

Compositio vero manifesta est ex jam descriptis.



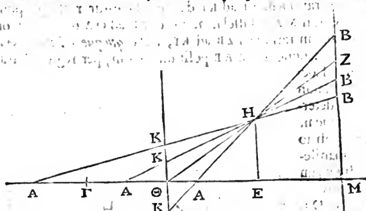
Cas. V. Ducatur, secundum modum quintum, recta AB auferens rationem BZ ad AΓ datam. Quoniam vero ratio BZ ad ΘK datur, ratio quoque ΘK ad AΓ data

data est; atque ipsa recta A B positione datur; juxta præcepta Casus quarti Loci sexti, qui quidem limites habet. Determinatur autem hujusmodi. Manentibus descriptis, capiatur Θ Λ media proportionalis inter Θ E, Θ Γ ac jungatur H Λ. Hæc recta H Λ auferet rationem Θ K ad Γ Λ, majorem quavis ratione, à qualibet rectâ per H ductâ, totique Γ Λ occurrente, ablatâ. Unde etiam recta A B auferet rationem B Z ad Λ Γ, majorem omni ratione, à rectâ quavis per H ductâ, totique rectæ Γ Ξ occurrente, resecandâ. Iisdem autem manentibus, Compositio problematis evidens est; quodque fieri possit duobus modis, ab utraque scilicet parte ipsius A B, rectis utrique A Θ, A Ξ occurrentibus.

LOCUS DECIMUS TERTIUS.

Cadat jam recta, per puncta H, Z ducta & producta, citra punctum Γ, ut Θ Z. Manifestum autem est rectas duci posse per punctum H, quæ occurrant rectis datis juxta quinque diversos modos sive Casus.

Cas. I. II. III. Ducantur autem rectæ A B, ad modum Casuum primi, & secundi, & tertii, quæ auferant rationes Z B ad Γ A datas. Agatur per punctum Θ, ipsi M Z parallela, recta Θ K. Jam quoniam rationes B Z ad Γ A dantur, atque etiam ratio B Z ad Θ K data est, dabuntur quoque rationes Θ K ad

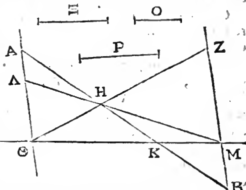


Γ A. Dantur autem positione rectæ duæ Θ K, A M; ac in recta Θ K sumitur punctum Θ, in ipsa vero A M punctum Γ. Punctum autem datum H est intra angulum K Θ M. Ducendæ sunt igitur rectæ quæ auferant rationes K Θ ad Γ A datas.

Dantur

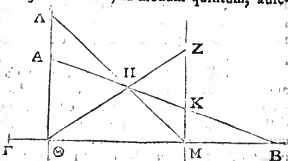
Dantur autem positione rectæ A B respectivè, nempe in primo Casu per Casum primum Loci quarti; in casu secundo, per secundum ejusdem; ac in tertio per tertium. Neque habent limites. Compositio autem manifesta est ex jam descriptis.

Cas. IV. Ducatur recta H B, juxta Casum quartum, auferens rationem Z B ad Γ K datam. Producatur ipsa H B ad A. Cumque Z B est ad Θ A in ratione datâ, ratio quoque Θ A ad K Γ data erit, adeoque recta A B positione datur, per Loci quarti Casum quartum. Constat autem rationem componendam majorem esse debere ratione Z M ad M Γ.



Componetur autem problema in hunc modum. Manentibus descriptis, proponatur ratio Ξ ad P major ratione Z M ad M Γ. Jungatur H M quæ producatur ad Λ, ac fiat ut Z H ad H Θ ita Ξ ad O: & ex æquo patebit rationem Λ Θ ad Γ M minorem esse ratione O ad P. Ductâ igitur rectâ A B per punctum H, quæ auferat rationem A Θ ad Γ K æqualem rationi O ad P, occurret illa necessario rectæ Θ M; quia rectæ propiores puncto Θ, *in ipsâ* Θ M *sumptæ*, semper auferunt rationes majores quam à rectis remotioribus abscissæ. Constat itaque ex prius ostensis rectam A B solvere problema.

Cas. V. Ducatur jam recta A B, ad modum quintum, auferens rationem Z K ad Γ B datam. Datâ ratione Z K ad A Θ, dabitur quoque ratio A Θ ad B Γ, adeoque recta A B positione datur, eodem modo quo resolvimus Casum quartum. Oportet autem rationem compo-

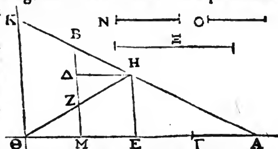


nendam minorem esse ratione ZM ad MΓ, ut patet per demonstrata in superiori Casu. Compositio autem manifesta est ex præmissis.

LOCUS DECIMUS QUARTUS.

Incidant jam rectæ duæ, ipsis ΓM, MZ parallelæ, ita ut earum altera HE fuerit citra punctum Γ; altera vero HΔ ultra punctum Z: ac manifestum est rectas per punctum H ductas disponi posse juxta quinque modos.

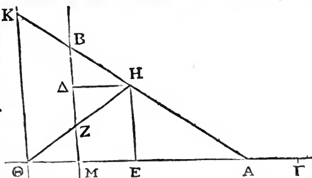
Cas. I. Ducatur recta AB, secundum Casum primum, auferens rationem ZB ad AΓ datam. Juncta HZ producatur ad Θ, & per punctum Θ ducatur recta ΘK ipsi MB parallela, rectæque AB in puncto K occurrens. Quoniam ratio ZB ad ΘK datur, ratio etiam ΘK ad ΓA data est. Dantur autem positione rectæ duæ AΘ, ΘK; in quarum alterâ ΘK sumitur punctum Θ, in altera vero AΘ punctum Γ; ac datum punctum H est intra angulum AΘK: recta vero HE per H ducta ipsi AΘ parallela cadit citra punctum Γ. Ducenda est igitur recta AK abscindens rationem ΘK ad AΓ datam. Hæc recta AK positione datur per Casum primum Loci *septimi Lib.* I. qui non habet limites.



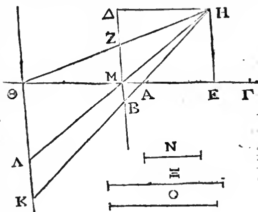
Componetur autem hujusmodi problema. Maneant descripta, ac sit ratio proposita sicut N ad O. Fiat ut ZH ad HΘ ita N ad Ξ; ac ducatur recta AHK, juxta Casum primum Loci *septimi*, quæ auferat rationem KΘ ad ΓA æqualem rationi Ξ ad O; ac manifestum est rectam ABK solvere problema.

Cas. II. Ducatur jam recta AB, juxta Casum secundum, auferens rationem ZB ad AΓ datam. Producatur ipsa AB ad K: cumque ratio ZB ad ΘK data est, ratio etiam ΘK ad ΓA datur, adeoque recta AHK positione datur, per Casum secundum Loci *septimi*. Limitem autem habet, & ad hunc modum determinatur. Capiatur recta ΘA media proportionalis inter ipsas ΘΓ, ΘE; ac jungatur HA quæ producatur ad

ad K. Dico rectam AK auferre rationem ΘK ad AΓ, minorem quavis ratione, à rectâ quacunque per H ductâ, totique EΓ occurrente, abscissâ. Hinc patet quo pacto componi possit problema, & quod fiat constructio duobus modis, ab utrâque parte ipsius AK, rectis scilicet ipsis ΓA, AE occurrentibus.



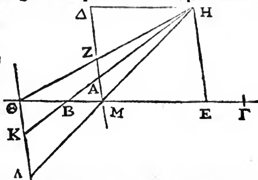
Cas. III. Ducatur recta HB, juxta Casum tertium, auferens rationem ZB ad ΓA datam; ac producatur ea ad punctum K. Quoniam ratio ZB ad KΘ datur, ratio etiam KΘ ad ΓA datur, adeoque recta HK positione datur, per Casum tertium Loci *septimi*. Constat autem rationem componendam majorem esse debere ratione ZM ad MΓ.



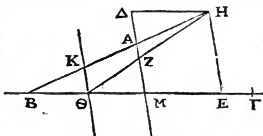
Componetur autem problema hujusmodi. Maneant descripta, & sit ratio data sicut N ad O major ratione ZM ad MΓ. Juncta HM producatur ad Λ, ac fiat ut ZH ad HΘ ita N ad Ξ; & patet ex æquo quod ratio ΛΘ ad ΓM minor erit ratione Ξ ad O: quare ductâ rectâ HK auferente rationem KΘ ad ΓA æqualem rationi Ξ ad O, occurret illa rectæ EM necessario. Etenim rectæ propiores puncto Θ auferunt semper rationes *minores* quam quæ abscinduntur à rectis remotioribus ab eodem; adeoque recta HK solvit problema.

Cas. IV. Ducatur jam recta HB, ad modum quartum, auferens rationem AZ ad BΓ datam, & producatur ea ad punctum K.

ctum K. Quoniam ratio AZ ad KΘ datur, data etiam est ratio KΘ ad BΓ; recta igitur HK positione datur, per solutionem Casus præcedentis. Oportet autem rationem componendam minorem esse ratione ZM ad MΓ. Componetur autem problema hujusmodi: maneant quæ prius, & sit ratio data sicut N ad O minor ratione ZM ad MΓ. Junge HM quæ producatur ad Λ, ac fiat omnino ut in Casu proxime præcedente.



Cas. V. Ducatur denique recta HB, juxta Casum quintum, auferens rationem AZ ad BΓ datam. Quoniam ratio ZA ad BΓ datur, atque etiam ratio ZA ad ΘK data est, igitur ratio quoque ΘK ad BΓ datur: unde recta HB positione datur, per Casum quartum Loci *septimi*, qui quidem determinatus est. Limitatur autem in hunc modum. Manentibus descriptis, capiatur recta ΘB media proportionalis inter ipsas ΘΓ, ΘE, ac jungatur HB. Hæc recta HB auferet rationem ΘK ad BΓ majorem quavis ratione à rectis per H ductis, totique rectæ BΘ occurrentibus, abscissâ; adeoque ex præmissis constat rectam eandem ZB auferre rationem ZA ad BΓ majorem quam recta quævis alia per H ducta, ipsique ZΔ occurrens. Quod si componendum sit problema, manifestum est fieri posse duobus modis, ab utraque parte rectæ HB; sumptis nempe segmentis ab utrisque ZA, AΔ. Hæc autem omnia facile consequuntur ex nuper demonstratis.



ANAKE-

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ.

Occurrant rectis duabus *poſitione datis* ΑΒ, ΑΓ rectæ duæ parallelæ ΗΜ, ΗΛ extra puncta data Ε & Ζ: ac patet rectas per Η ductas diſponi poſſe juxta quinque Caſus. Auferant autem rectæ ΘΚ, juxta formas primam & ſecundam, rationes ΚΖ ad ΕΘ æquales rationibus datis. Junctis punctis Η, Ζ, producatur recta ΗΖ ad Ν; ac per punctum Ν ducatur recta ΝΣ ipſi ΑΒ parallela. Producantur etiam rectæ ΘΚ ad Π. Quoniam autem utraque ΝΗ, ΖΗ datur magnitudine, earundem etiam ratio data eſt. Sed ΝΗ eſt ad ΖΗ ut ΝΠ ad ΚΖ, adeoque ratio ΝΠ ad ΚΖ datur: cumque ratio ΚΖ ad ΕΘ data eſt, ipſa quoque ratio ΝΠ ad ΕΘ datur. Jam dantur poſitione rectæ duæ ΓΝ, ΝΣ; ac ſumitur in recta ΓΝ punctum Ε, in recta vero ΝΣ punctum Ν; datum autem punctum Η eſt intra angulum ΓΝΣ; ac recta per Η ducta ipſi ΑΒ parallela non tranſit per punctum Ε: ducenda eſt igitur recta ΘΗΚΠ auferens rationem ΝΠ ad ΘΕ æqualem rationi datæ. Ac manifeſta eſt ſolutio. Caſus autem primus abſque limitibus eſt; ſecundus vero non item. Determinatur autem Caſus ſecundus, capiendo mediam proportionalem inter ipſas ΝΜ, ΝΕ, ut recta ΝΘ; ac jungendo rectam ΗΘ, quæ producatur ad Π. Ratio enim ΝΠ ad ΕΘ, in rectis ΝΣ, ΕΜ, erit ratio minima. Dico quoque rationem ΚΖ ad ΕΘ, in rectis ΑΒ, ΕΜ, eſſe rationem minimam. Educatur enim è puncto Η recta alia ΞΗΡ. Jam quoniam ratio ΝΠ ad ΕΘ minor eſt ratione ΝΡ ad ΕΞ, permutando erit ratio ΝΠ ad ΝΡ minor ratione ΕΘ ad ΕΞ. Sed ΝΠ eſt ad ΝΡ ut ΖΚ ad ΖΟ; quare ratio ΚΖ ad

Ζ Ο minor erit ratione Ε Θ ad Ε Ξ; unde permutando ratio Κ Ζ ad Ε Θ minor erit ratione Ζ Ο ad Ε Ξ. Ratio igitur Κ Ζ ad Ε Θ minima eſt in rectis Α Β, Ε Μ.

Componetur autem hunc in modum. Manentibus deſcriptis, ſit ratio data ſicut Φ ad Χ. Hæc ratio vel æqualis erit rationi Κ Ζ ad Ε Θ, vel minor erit eâ, vel major. Si vero ratio Φ ad Χ æqualis fuerit rationi Κ Ζ ad Ε Θ ſola recta Η Π ſolvet problema. Si minor fuerit eâ, problema impoſſibile eſt. Quod ſi major fuerit eâ, tum conſtrui poteſt duobus modis. Ponatur jam rationem Φ ad Χ majorem eſſe ratione Κ Ζ ad Ε Θ. Fiat ut Ζ Η ad Η Ν ita Φ ad Ψ, *ac ratio* Ψ *ad* Χ major erit ratione Ν Π ad Ε Θ; adeoque poſſibile erit ducere per punctum Η rectam abſcindentem rationem Ψ ad Χ, idque duobus modis, ab utraque parte ipſius Η Π. Ducantur igitur rectæ tales Ξ Η Ρ, Τ Η Σ: dico utramque rectam ſatisfacere problemati. Quoniam enim Η Ζ eſt ad Η Ν ſicut Ζ Τ ad Ν Σ, atque etiam ut Φ ad Ψ; erit quoque Ζ Τ ad Ν Σ ſicut Φ ad Ψ. Sed Ν Σ eſt ad Ε Υ ſicut Ψ ad Χ, adeoque ex æquo erit Ζ Τ ad Ε Υ ſicut Φ ad Χ. Recta igitur Τ Η Σ Υ ſatisfacit problemati. *Ac pari argumento recta altera* Ξ Η Ο Ρ *tantundem præſtat.*

Auferat jam recta Η Θ Κ, juxta Caſus tertium & quartum, rationes Κ Ζ ad Ε Θ æquales rationibus datis. Juncta Η Ζ producatur ad Ν, & per punctum Ν ducatur recta Ν Π, ipſi Α Β parallela: prolongetur etiam Η Κ Θ ad Π. Quoniam vero utraque recta Ν Η, Η Ζ datur magnitudine, ratio earundem datur: cum Η Ν eſt ad Η Ζ ut Π Ν ad Κ Ζ, ratio etiam Π Ν ad Κ Ζ datur. Ob datam autem rationem Κ Ζ ad Ε Θ, ratio quoque Ν Π ad Ε Θ datur. Dantur igitur poſitione duæ rectæ in eodem plano, nempe Γ Ν, Δ Π; ac in recta Γ Ν ſumitur punctum Ε, in ipſa vero Δ Ν Π punctum Ν; punctum autem datum Η, eſt intra angulum Γ Ν Δ; ac recta quæ per Η ducitur ipſi Ν Π parallela cadit citra punctum Ε. Ducenda eſt itaque recta Η Θ Π per punctum Η, auferens rationem Ν Π ad Ε Θ æqualem rationi datæ. Manifeſtum eſt autem quod, in Caſu tertio, ratio Κ Ζ ad Ζ Ξ major eſt ratione Θ Ε ad Ε Ξ; quodque, in Caſu quarto, ratio iſta minor eſt eâ. Permutando autem, ratio Κ Ζ ad Θ Ε, in Caſu tertio, major erit ratione Ζ Ξ ad Ε Ξ; ut in Caſu quarto, minor erit eâ. Sed ratio Κ Ζ ad Ε Θ æqualis eſt rationi datæ; adeoque oportet rationem

tionem datam majorem esse, in tertio Casu; minorem vero in quarto, ratione ZΞ ad ΞE.

Componetur autem problema hujusmodi. Maneant descripta, ac jungatur HΞ, quæ producatur ad P. Esto ratio data sicut Φ ad X, in tertio Casu major; in quarto minor ratione ZΞ ad ΞE. Fiat ut HZ ad HN ita Φ ad Ψ: ac ratio Ψ ad X in Casu tertio, major erit ratione PN ad ΞE; at in Casu quarto minor erit eà. Quocirca recta HΞP auferet rationem in Casu tertio, minimam; ut in quarto, maximam. Si itaque jubeatur ducere per punctum H rectam auferentem rationem Ψ ad X; vel erit recta sic ducta, juxta modum tertium, occurrens ipsi EΞ; vel juxta modum quartum, cadens ab altera parte puncti Ξ. Ductâ autem rectâ HΠ auferente rationem NΠ ad EΘ æqualem rationi Ψ ad X, ratio KZ ad EΘ æqualis erit rationi Φ ad X: adeoque recta illa HΠ satisfacit problemati.

Auferat autem recta HKΘ, juxta modum quintum, rationem KZ ad EΘ æqualem rationi datæ. Jungatur HZ ac producatur ea ad N. Per N agatur recta OP ipsi AB parallela. Jam quoniam utraque recta HN, HZ magnitudine datur, ratio etiam NH ad HZ datur. Sed NH est ad HZ ut NΠ ad KZ. Ob datam itaque rationem KZ ad EΘ, ratio ΠN ad EΘ data erit. Jam sunt in eodem plano rectæ duæ positione datæ, nempe EN, OP; ac sumitur in recta EN punctum E, ac in ipsâ OP punctum N; punctum autem datum H est intra angulum ENP; recta vero per H ducta ipsi AB parallela cadit citra punctum E. Ducenda est igitur recta ΘHΠ per

punctum

punctum H, quæ auferat rationem ΠN ad EΘ æqualem rationi datæ, per ea quæ demonstrantur in præmissis. Determinatur autem faciendo NΘ mediam proportionalem inter ipsas MN, NE, ac jungendo rectam HΘ auferentem à rectis OP, EN segmenta ΠN, EΘ habentia inter se rationem maximam. Dico eandem rectam auferre à rectis AB, EN rationem KZ ad EΘ maximam. Jungatur enim recta alia HΛ, ac ratio ΠN ad EΘ major erit ratione ΞN ad EΛ. Permutando autem ratio ΠN ad ΞN major erit ratione EΘ ad EΛ. Sed ΠN est ad ΞN sicut KZ ad ZT; adeoque ratio KZ ad ZT major est ratione EΘ ad EΛ: unde permutando, ratio KZ ad ΘE major erit ratione ZT ad EΛ. Quapropter etiam in rectis AB, EN ratio KZ ad EΘ maxima est.

Componetur autem problema ad hunc modum. Manentibus descriptis, sit ratio data sicut Φ ad X, quæ vel æqualis erit rationi KZ ad EΘ, vel major erit eâ, vel minor. Si æqualis fuerit ei, sola recta HΘ solvet problema. Si vero major fuerit eâ, problema impossibile est. Quod si minor fuerit, componetur duobus modis. Sit enim ratio Φ ad X *minor ratione* KZ *ad* EΘ; *ac fiat ut* HZ *ad* HN *ita* Φ *ad* Ψ; *ac manifestum est* rationem Ψ ad X minorem esse ratione ΠN ad EΘ. Ratio autem ΠN ad ΘE est ratio maxima, adeoque possibile erit ducere per punctum H rectam auferentem rationem Ψ ad X, idque duobus modis, ab utrâque parte ipsius HΘ. Ductis autem rectis HΛ, HΣ, *quæ auferant rationes æquales rationi* Ψ *ad* X, *dico ipsas solvere problema. Etenim* ZH *est ad* HN, *hoc est* ZT *ad* ΞN, *ut* Φ *ad* Ψ; *ac* ΞN *est ad* EΛ *sicut* Ψ *ad* X; *adeoque ex æquo erit* ZT *ad* EΛ ut Φ ad X. Recta itaque HΛ solvit problema; & pari modo probabitur rectam HΣ idem præstare.

SCHOLION.

SCHOLION.

Ex numero Locorum & Casuum, *utrique libro à* Pappo *assignato, satis superque liquet genuinum hoc esse* Apollonii *opus: quod licet, ex Versione, utpote Arabicâ mendosâ, traductum, plurime à nativâ elegantiâ discedere existimetur; Literatis omnibus, præsertim Geometris, non ingratum esse confido. Ne tanta Casuum multitudine Lectoris animus turbaretur, non abs re fore arbitror, rem totam ob oculos ponere; descriptoque* Loco *quem tangunt rectæ omnes datam rationem à datis rectis abscindentes, puncti* H *situm in singulis expendere.*

Sint rectæ duæ AB, ΔE *positione datæ, sese interfecantes in puncto* M; *ac in* AB *sumatur punctum* Γ, *in* ΔE *vero punctum* Z: *describere oportet Curvas illas quas tangant rectæ omnes, auferentes à rectis datis segmenta punctis* Γ, Z *adjacentia, quæ sint in ratione datâ; puta ut* m *ad* n. *Fiat ut* m *ad* n *ita* ΓM *ad rectam aliam, utrinque à puncto* Z *in rectâ* ΔE *collocandam, ut* ZΘ, ZK. *Et in eadem ratione* m *ad* n *capiatur ad* ZM *recta, æqualis ipsi* ΓΛ *vel* ΓN, *utrinque à puncto* Γ *in recta* AB *ponenda. Quoniam vero* MΓ *est ad* ΘZ *sive*

ZK *ut* m *ad* n, *atque etiam* ΓΛ *vel* ΓN *est ad* ZM *in eadem ratione; erit componendo* MΛ *ad* ΘM, *ac dividendo* MN *ad* MK *in eadem ratione, sive ut* m *ad* n. *Quinetiam si auferatur ab ipsâ* ΓM *recta aliqua ut* ΓP, *ac simul addatur ipsi* ZM *recta* ZO, *quæ fuerit ad* ΓP *sicut* n *ad* m; *dividendo* MP *erit ad* ΘO *in eadem ratione ac* m *ad* n; *ac vicissim, si augeatur recta* ΓM *ac minuatur ipsa* ZM; *componendo erunt*

 etiam

etiam segmenta in eadem ratione. Ac facili negotio idem in rectis ΓΜ, ΖΚ *demonstrabitur. Hinc si loco Parabolarum conjugatarum, quas in Scholio ad finem Lib. I. adhibuimus, describantur Parabolæ duæ, quarum altera contingat rectas* ΑΒ, ΔΕ *in punctis* Α, Θ; *altera vero in punctis* Κ *ac* Ν: *patebit, per ibidem demonstrata, rectas omnes Parabolam* ΛΠΘΤ *contingentes abscindere è rectis* ΜΑ, ΘΕ; *uti & è rectis* ΜΒ, ΘΔ, *rationes æquales rationi* m *ad* n. *Tangentes vero omnes alterius Parabolæ* ΣΚΝΞ *auferent à rectis* ΜΑ, ΚΔ; *ac ab ipsis* ΜΒ, ΚΕ, *easdem rationes* m *ad* n. *Quoniam vero* ΓΜ *est ad* ΖΘ *ac* ΖΚ *sicut* m *ad* n; *componendo aut dividendo, pro genio Casûs, segmenta omnia à Tangentibus prioris Parabolæ è rectis* ΓΑ, ΖΕ; *vel ex ipsis* ΓΒ, ΖΔ *abscissa: aut à Tangentibus posterioris, ex ipsis* ΓΑ, ΖΔ, *vel* ΓΒ, ΖΕ *ablata, erunt in eadem ratione. Patet etiam rectam* ΖΓΞ, *puncta data* Γ, Ζ *connectentem, contingere utramque Parabolam, puta in punctis* Π *&* Ξ; *quia recta hæc aufert rationem* ΜΓ *ad* ΖΘ *vel* ΖΚ *æqualem rationi* m *ad* n.

Dantur igitur tres Tangentes utrique Parabolæ communes, ac in earum altera puncta contactûs utriusque Curvæ, ut Θ *&* Κ: *unde levi opere* Locus *sive Curvæ ipsæ describi possunt, per ea quæ ad finem Scholii prædicti præcepimus. Datis autem Curvis illis, manifestum est, si reperiatur punctum datum* Η *in ipsis punctis contactuum* Π *&* Ξ, *unico tantum modo componi posse problema: si fuerit punctum* Η *intra ambitum alterutrius Parabolæ, vel si tangat ipsam rectam* ΖΓΞ *productam, non nisi duas Tangentes duci posse: adeoque duobus tantum modis componi problema. Si vero punctum* Η *tangat ipsas Parabolas, tribus modis efficietur Constructio. Quod si ponatur punctum datum* Η *extra Curvas, nec in rectâ* ΖΓ, *ubicunque fuerit, quatuor Tangentes duci possunt, ad utramque Parabolam binæ, unde etiam juxta quatuor modos componendum est problema.*

Observandum tamen est quod, si ratio m *ad* n *minor fuerit ratione* ΓΜ *ad* ΖΜ, *punctum* Κ *cadet ad easdem partes cum puncto* Ζ; *ac Parabola altera* ΞΝΚΣ *non in angulo* ΑΜΔ, *sed in angulo* ΕΜΒ, *describenda erit. At si ratio auferenda æqualis fuerit rationi* ΓΜ *ad* ΖΜ, *coincidente puncto* Κ *cum puncto* Μ, *recta* ΗΜ *satisfaciet problemati; atque etiam recta alia, ipsi* ΓΖ *parallela, per punctum* Η *ducta.*

Hinc

Hinc manuducimur ad aliam & à constructione Apollonii *diversissimam problematis effectionem, nec minus facilem. Nam si loco puncti* Z *in rectâ* ΔE *sumantur puncta* Θ *&* K, *æqualiter à* Z *utrinque distantia; ac loco puncti* Γ *in recta* AB *sumatur punctum concursûs* M: *ubicunq; fuerit punctum datum* H, *manifestum est resolvi posse problema, per Casus quosdam quatuor Locorum ultimorum Libri primi. Nec ulteriori explicatione*

opus est, utpote in re satis evidente; cum scilicet segmenta omnia in rectis positione datis, punctis Θ, M *adjacentia, sint in eâdem ratione cum segmentis ab eâdem rectâ abscissis, ac punctis* Γ, Z *adjacentibus; hoc est, in ratione* ΓM *ad* ZΘ *vel* ZK. *Exempli gratiâ, ductâ rectâ quâvis* PO *auferente à positione datis* AB, ΔE *segmenta* MP *&* ΘO, *punctis* M *&* Θ *adjacentia, quæ sint in ratione datâ sive ut* ΓM *ad* ZΘ. *Dico eandem rectam* PO *abscindere etiam segmenta* ΓP *ad* ZO, *punctis* Γ, Z *adjacentia, eandem rationem inter se habentia quam habet* ΓM *ad* ZΘ. *Etenim si* ΓM *sit ad* ZΘ *sicut* m *ad* n, *ac fiat etiam* MP *ad* ΘO *in eadem ratione datâ* (*per Casus* II[dos] *Loci quarti vel septimi Lib.* I.) *erit etiam dividendo,* ΓM—MP, *sive* ΓP, *ad* ZΘ—ΘO, *hoc est ad* ZO, *ut* m *ad* n: *recta igitur* PO *satisfacit problemati.*

Per totum autem Librum secundum fere, duplici Compositione effici potest propositum, etiam juxta methodum Apollonii, *tametsi hoc reticeat; indifferenter enim duci potest recta parallela per punctum* H *ad hanc vel illam è rectis duabus positione datis: adeo ut pro diversitate situs pun-*

ctorum Γ *&* Ζ, *ad alia Loca aliosque Casus idem problema plerumque referri possit: quod quidem innuisse sufficiat. Quinetiam Casus Loci secundi Lib.* II. *ad modum Loci octavi & noni, paulo simplicius (ut videtur) & resolvuntur & determinantur.*

Porro Capitula hujus Libri τόπες *sive* Loca *inscripsit* Apollonius, *sensu omnino Geometrico, ad indigitandum* Locum *sive situm puncti* Η *in singulis diversum, respectu trianguli* Ζ Γ Μ, *in plano infinito circumjecto. Loca autem hæc sunt genere diversissima: nam Locus primus, quartus, quintus & decimus occupant spatia summo modo infinita, ac totum planum complentia, si adjeceris Locum tertium & decimum quartum inter parallelas intercepta, ac quoad unam tantum dimensionem infinita. Locus Decimus-tertius occupat solum triangulum* Ζ Γ Μ; *eidemque æquale spatium duodecimus. Secundus, sextus, & nonus punctum* Η *in rectis infinitis collocant; ut octavus & undecimus in finitis. Denique Locus septimus non nisi unicum punctum est, in concursu scilicet duarum rectarum ipsis* Γ Μ, Μ Ζ *parallelarum, per puncta* Γ *&* Ζ *ductarum.*

APOL-

APOLLONII PERGÆI

De Sectione Spatii,

SIVE

ΠΕΡΙ ΧΩΡΙΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ,

LIBER PRIOR RESTITUTUS.

QUÆNAM fuerit Analysis Veterum, è specimine librorum præcedentium abunde constat. Lectoribus autem nonnullis nimius fortasse videatur auctor noster, dum in tot Casus diversos problema de Sectione Rationis distribui voluit; singulorum Resolutionem ac Compositionem fuse docens. Veniam tamen indulgebit, qui animadverterit hos libros à *Pappo* immediate post *Euclidis Data* describi, quasi Analyseos studiosis apprime necessarios, ac in exemplum plani problematis per omnes casus plenissime soluti designatos: nec tam Mathematicorum peritis scriptos, quam in gratiam eorum qui velint ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικήν, ut ait *Pappus*. Agnitâ autem hujus Analyseos præstantia, *Apollonii* opus de Sectione Spatii sive rectanguli, jam olim deperditum, restaurare aggressus sum; nec irrito conamine. Manifestum enim est ex descriptione *Pappi*, hos libros eodem omnino subdivisionis ordine, quoad *Loca* & *Casus*, distributos fuisse. Exactâ autem resolutione comperi problemata duo περὶ λόγου ἀποτομῆς, & περὶ χωρίου ἀποτομῆς, conjunctissima ac quasi germana esse; levique facta mutatione per omnia quasi coincidere. Quocirca solutionem ejus subjungere visum est, inventam ac demonstratam ad exemplum præcedentium; nec multum, ut opinor, ab ipsius *Apollonii* opere (si unquam lucem viderit) discrepaturam: nisi quod in gratiam Lectorum, quibus brevitas magis cordi est, in compendium, quantum fieri licuit, redacta sit. Hoc autem

magna ex parte fit, observatis in omni Casu, ad puncta correspondentia designanda, iisdem notis Alphabeticis.

PROPOSITIO GENERALIS.

Sint duæ rectæ infinitæ in eodem plano positione datæ, ut A B, Δ E; vel parallelæ inter se, vel occurrentes invicem in puncto M. Sumatur autem in rectâ A B punctum Γ, in ipsâ vero Δ E punctum Z. Ducenda est recta, per punctum quodvis datum H, non contingens positione datas, quæ auferat ab ipsis segmenta Γ K, Z Λ, rectangulum dato (quod semper Ξ appellare licet) æquale continentia.

Sint autem imprimis rectæ duæ positione datæ invicem parallelæ; ac punctum datum H cadet necessario vel intra vel extra parallelas datas.

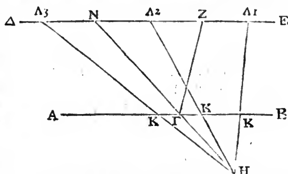
LOCUS PRIMUS.

Cadat primo punctum H extra parallelas datas: ac manifestum est problema effici posse juxta tres modos, segmentis scilicet ab ipsis Γ B, Z E, vel ab ipsis Γ B, Z Δ, vel denique ab ipsis A Γ, Z Δ auferendis.

In unoquoque horum Casuum eadem plane est Analysis, eademque Compositio. Ponatur itaque in quolibet casu rectam H K Λ abscindere segmenta Γ K, Z Λ rectangulum æquale rectangulo dato Ξ comprehendentia. Junctis punctis datis H, Γ, recta H Γ data erit positione, quæ producatur ad occursum cum positione datâ Δ E; adeoque punctum occursus N datur, ipsaque recta N Z: ob data autem tria puncta H, Γ, N ratio ipsius H Γ ad H N data erit. Verum ratio Γ K ad N Λ eadem est ac ratio H Γ ad H N; quare ratio Γ K ad N Λ etiam data est: unde & ratio rectanguli Γ K in Z Λ ad rectangulum N Λ in Z Λ datur. Sed rectangulum Γ K in Z Λ datum est; quare rectangulum Z Λ in N Λ quoque datur, applicandum ad rectam datam N Z, excedens quadrato in casu primo ac tertio, vel deficiens quadrato in secundo; unde (per 58um & 59um *Datorum Euclidis*) dantur puncta applicationis Λ; iisque datis, rectæ etiam H K Λ dantur positione.

Ac

Ac manifestum est casus primum & tertium nullis limitibus obnoxios esse, sed rectas remotiores à punctis datis Γ, Z semper auferre Spatia majora, quam quæ iisdem propiores sunt. Patet quoque rectam Z Λ, in primo Casu, semper æquari ipsi N Λ in tertio. Secundus autem casus determinatur, quia rectangulum N Λ in Λ Z, quod sit ad rectangulum Ξ ut H N ad H Γ, applicandum est ad rectam N Z deficiens quadrato. Applicatio autem ista fieri nequit quoties rectangulum illud majus fuerit quadrato



dimidii ipsius N Z. Fiet autem modo singulari, si punctum Λ reperiatur in medio ipsius N Z; adeoque rectangulum maximum, juxta hunc casum auferendum, erit ad quadratum dimidii ipsius N Z, sicut Γ K ad N Λ sive ut H Γ ad H N. Hoc si majus fuerit spatium datum, problema propositum impossible est. Quod si minus fuerit eo, patet applicationem fieri posse dupliciter, adeoque duobus modis componi problema, rectis nempe æqualiter à punctis N, Z utrinque distantibus.

Compositio autem manifesta est. Nam si producatur recta H Γ ad N, ac fiat ut H Γ ad H N ita rectangulum datum Ξ ad aliud O; dein utrinque applicetur ad rectam datam N Z rectangulum illud O excedens quadrato; atque, si fieri potest, etiam deficiens quadrato: habebuntur omnia puncta quæsita Λ in punctis applicationum, ductæque omnes rectæ H K Λ satisfacient problemati. Quoniam enim rectangulum N Λ in Λ Z æquale est rectangulo O, ac rectangulum O est ad rectangulum Ξ ut N Λ ad Γ K; erit rectangulum Γ K in Λ Z æquale rectangulo Ξ. Rectæ igitur omnes H K Λ solvunt problema. Q.E.D.

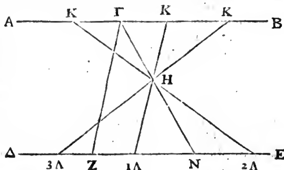
Problema igitur hoc semper effici potest dupliciter juxta Casus primum & tertium; atque etiam dupliciter, juxta secundum, modo rectangulum O minus fuerit quadrato ex dimidio ipsius N Z. Quod si eidem æquale fuerit, fiet modo singulari: si vero majus fuerit eo impossibilis erit Constructio.

LOCUS

LOCUS SECUNDUS.

Sit jam punctum datum H intra parallelas datas: patet tribus modis duci posse rectas, quæ segmenta auferant ΓK & ZΛ datum rectangulum Ξ continentia: vel enim ex ipsis ΓB, ZE; vel ex ipsis ΓA, ZE; vel tertio ex ipsis ΓB, ZΔ resecta erunt.

In omni autem Casu, mutatis mutandis, eadem est resolutio cum præcedente. Junctâ enim & productâ rectâ ΓH ad N, recta HN dabitur magnitudine & positione; ac ob data puncta Γ, H, N, ratio ipsius ΓH ad HN, hoc est, ΓK ad ΛN, (ob similia triangula) data erit. Sed ut ΓK est ad ΛN ita rectangulum ΓK in ΛZ ad rectangulum ΛN in ΛZ. Datum autem est rectangulum ΓK in ΛZ; quare datur quoque rectangulum NΛ in ΛZ, applicandum ad rectam datam NZ deficiens quadrato, in primo Casu; excedens vero quadrato in secundo ac tertio: qui quidem Casus proinde semper possibiles sunt, ac rectæ propiores punctis Γ, Z, auferunt semper Spatia minora quam remotiores ab iisdem.



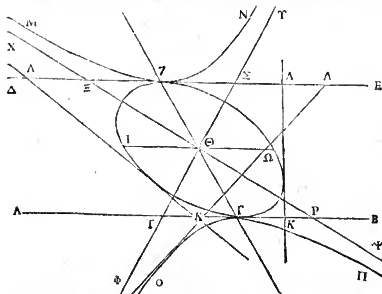
Primus autem Casus Dioristicus est, neque applicari potest rectangulum deficiens quadrato ad rectam NZ, quod majus fuerit quadrato dimidii ipsius NZ. Rectangulum igitur maximum, quod abscindi potest juxta Casum primum, erit ad quadratum dimidii ipsius NZ, ut ΓH ad HN. Hoc si majus fuerit rectangulum propositum Ξ, non componetur problema, ut impossibile. Si æquale fuerit ei, singulari tantum modo fiet. Si vero minus fuerit eo, dupliciter construi potest problema, factâ ad utramque partem applicatione.

Compositio autem manifesta est, eademque omnino cum illâ quam in præcedente Loco ostendimus. Fiat enim ut ΓH ad HN ita rectangulum datum Ξ ad aliud O, quod applicetur ad rectam NZ, deficiens quadrato in primo Casu, excedens vero

in

in ſecundo ac tertio. Duobus itaque ſemper fieri poteſt modis; atque inſuper duobus, quoties rectangulum O minus fuerit quadrato ex dimidio ipſius N Z; vel modo ſingulari, ſi eidem æquale fuerit, hoc eſt omnino tribus.

Cæterum ut in Sectione Rationis Scholia addidimus pro exhibendis Locis Geometricis, quæ tangant rectæ omnes rem propoſitam præſtantes; ita in Sectione Spatii Lectori curioſo non injucundum erit nec inutile eadem commonſtrari, locaque deſignari quæ tangant rectæ omnes rectangulum datum auferentes. Hoc autem fit ope Propoſitionis 42^{dæ} Lib. III. *Conicorum Apollonii* noſtri, quâ demonſtratur, *Si rectæ tres contingant Ellipſin vel Hyperbolam, quarum duæ parallelæ ſint & dentur poſitione; quadratum ſemidiametri Sectionis his duabus parallelæ æquale eſſe rectangulo ſegmentorum inter puncta contactuum & Tangentem tertium interjectorum.* Idemque demonſtrationibus propriis Illuſtriſſimus *Newtonus* in *Principiis*, & Cl. *Hireus* in *Conicis* ſtabiliverunt. Hoc autem poſito, ſi deſcribatur Ellipſis Γ I Z Ω cujus diameter ſit recta Γ Z, jungens puncta



Γ, Z in rectis poſitione datis ſumpta; in ejuſque medio centrum Θ; eidem autem Conjugata diameter ſit recta I Θ Ω ipſi A B, Δ E parallela, quæ poſſit quadruplum rectanguli dati

ſegmentorum auferendorum: dico omnes Tangentes hujus Ellipſeos abſcindere ſegmenta ΓΚ, ΖΛ rectangulum æquale dato comprehendentia; ſi nempe ab eodem latere rectæ ΖΓ ſumenda ſint, ut in Caſu I & III Loci primi, & in primo ſecundi. Quod ſi in contrarias partes ſegmenta auferenda ſint, ut in II^do^ primi, & II^do^ & III° ſecundi; deſcribantur Hyperbolæ oppoſitæ ΜΖΝ, ΟΓΠ, eaſdem cum Ellipſi diametros habentes: ac rectæ omnes Curvas illas Hyperbolicas contingentes abſcindent etiam ſegmenta rectangulum æquale rectangulo dato continentia. Quæ omnia ex ipſâ *Apollonii* propoſitione prædictâ ſatis patent. Jam fiant ΖΞ, ΖΣ & ΓΡ, ΓΤ æquales ſemidiametro conjugatæ ΘΙ; ac rectæ ΣΘΤ, ΞΘΡ in infinitum productæ, ut ΤΘΦ, ΧΘΨ, erunt oppoſitarum Hyperbolarum Aſymptoti. Datis autem Aſymptotis & punctis Γ, Ζ paratiſſima eſt Curvarum deſcriptio.

Hinc manifeſtum eſt problema quaternas habere ſolutiones, ſi fuerit punctum datum Η extra ambitum Ellipſeos vel oppoſitarum Hyperbolarum. Si vero punctum Η reperiatur intra earundem Curvarum partes concavas, non niſi binæ duci poſſunt Tangentes ad Ellipſin, ſi fuerit intra ambitum Hyperbolarum; vel ad Hyperbolas, ſi fuerit intra Ellipſin: adeoque duobus tantum modis ſolvetur problema. Quod ſi punctum Η tangat alteram harum Curvarum, trium omnino ſolutionum capax eſt propoſitum: modo nempe ſingulari, rectâ Curvam tangente in puncto dato Η; ac dupliciter per Tangentes alterius Curvæ.

Cave tamen ne credas Curvarum Conicarum deſcriptionem præcipi ad plani problematis effectionem, ſed tantum ad uberiorem rei explicationem. Viciſſim autem Tangentibus ad Curvas Conicas de punctis datis ducendis, etiamſi Curvæ nondum deſcriptæ ſint, converſo argumento via ſternitur; uti poſthac demoſtrabitur.

LOCUS TERTIUS.

Interſecent jam ſe mutuo rectæ duæ poſitione datæ, ut ΑΒ, ΔΕ, in puncto Μ, ac concipiatur utrumque punctum Γ & Ζ coaleſcere in commune punctum occurſus Μ: oportet ducere, per punctum datum Η, rectam quæ auferat ſegmenta ΜΚ, ΜΛ rectangulum æquale rectangulo dato comprehen-

dentia. Hoc autem fieri poteſt juxta tres Caſus; vel enim abſciſſum erit rectangulum ex ipſis A M, M Δ; vel ex ipſis B M, M E; vel tertio ab ipſis A M, M E.

Age rectam H Θ per punctum H ipſi A B parallelam; ac punctum Θ atque ipſæ H Θ, Θ M dabuntur tam magnitudine quam poſitione. Applicetur ad rectam Θ H rectangulum datum; & latitudo inde orta data erit: ſitque ea recta M Π utrinque ponenda. Quoniam vero rectangulum H Θ in M Π æquale eſt rectangulo M K in M Λ, erit H Θ ad M K, hoc eſt Θ Λ ad Λ M, ut Λ M ad M Π: quare, dividendo in primo & tertio Caſu, & componendo in ſecundo, Θ M erit ad M Λ ſicut Λ Π ad Π M; adeoque rectangulum Θ M in M Π æquale erit rectangulo M Λ in Λ Π. Sed rectangulum Θ M in M Π datum eſt, ob utramque rectam datam; datum eſt igitur rect-

A
K
H
K
Δ
Z
Λ2
E
Λ1
Π2
M
Γ
Θ
Λ3
Π1
K
B

angulum M Λ in Λ Π, applicandum ad rectam datam M Π, excedens quadrato in primo & ſecundo Caſu; deficiens vero quadrato in tertio, qui proinde Dioriſmum habet. Rectangulum autem minimum aufertur, quoties rectangulum Θ M in M Π æquale eſt quadrato dimidii ipſius M Π, ſive cum M Π æquale eſt quater ipſi M Θ. Cumq; M Π in H Θ ſemper æquale ſit rectangulo dato, rectangulum illud minimum æquale erit quater rectangulo H Θ in Θ M.

Componetur autem problema, ſi manente rectâ parallelâ H Θ, eidem applicetur rectangulum auferendum Z; ac fiat M Π,

 ponenda

ponenda ab utrâque parte puncti M, æqualis latitudini quæ resultat. Deinde ipsi MΠ applicetur rectangulum datum MΠ in ΘM excedens quadrato, in Casu primo & secundo; deficiens vero in tertio: & sint puncta applicationis A2, A3. Ducantur rectæ HKA. Dico illas satisfacere problemati. Quoniam enim rectangulum MA in AΠ æquale est rectangulo ΘM in MΠ, erit ΘM ad MA ut ΠA ad MΠ; ac componendo in primo & secundo Casu, vel dividendo in tertio, erit ΘA ad AM sicut AM ad MΠ. Sed ΘA est ad AM ut HΘ ad KM, quare HΘ est ad KM sicut AM ad MΠ. Est igitur rectangulum HΘ in MΠ æquale rectangulo KM in MA. Sed rectangulum ΘH in MΠ æquale est rectangulo dato Ξ, adeoque & rectangulum KM in MA; rectæ igitur HKA solvunt problema. Q. E. D.

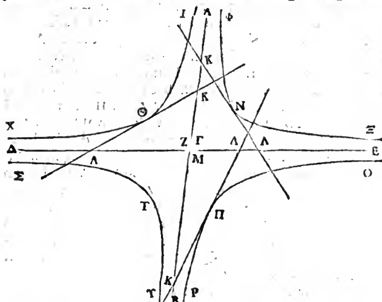
In Casu autem tertio demonstratum est applicationem fieri non posse, si rectangulum datum minus fuerit quater rectangulo HΘ in ΘM. Tunc enim non nisi duæ rectæ duci possunt, juxta modos primum & secundum, punctis A æqualiter à punctis M & Π utrinque distantibus. Si æquale fuerit rectangulum datum Ξ quatuor rectangulis HΘ in ΘM, construetur modo singulari juxta tertium. Si vero majus fuerit eo, tum fiet dupliciter juxta modum tertium, ita ut omnino quatuor habeat solutiones.

Observandum autem est rectam MΠ à puncto M in contrarias partes puncti Θ collocari debere, in primo & secundo Casu; in tertio vero in easdem, sive versus Θ: quia in omnibus ΘA est ad AM ut AM ad MΠ, atque adeo si punctum Θ ex hypothesi sit intermedium inter A & M, ut in tertio Casu, etiam punctum A intermedium esse debet inter puncta M & Π. Recta itaque MΠ ad easdem partes puncti A, hoc est puncti Θ, ponenda est; & rectangulum applicandum deficiens quadrato. Quod si punctum Θ externum fuerit, externum erit & A; adeoque in contrarias partes puncti Θ ponenda recta MΠ, cui semper applicandum est rectangulum excedens quadrato, ut punctum A externum esse possit.

Tangent autem rectæ omnes datum rectangulum abscindentes binas oppositas Hyperbolas conjugatas, quorum commune centrum est punctum M, in occursu rectarum positione datarum: ipsæ vero rectæ AB, ΔE earundem communes Asymptoti sunt. Jam si fiant MK, MA æquales late-

ribus

ribus datis rectanguli auferendi, ac jungantur rectæ quævis Κ Λ, quæ bisecentur in punctis Θ, Ν, Π &c. erunt puncta illa Θ, Ν, Π puncta contactuum ipsarum Κ Λ cum Curvis Hyperbolicis describendis. Datis autem Asymptotis & puncto quovis, facili negotio ipsæ Curvæ describi possunt; ut jam dictum est. Sunt autem omnia rectangula segmento-



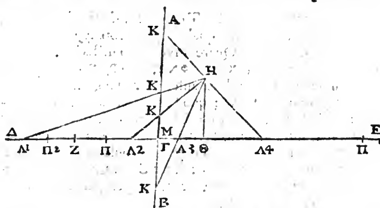
rum ex Asymptotis, ductâ Tangente quâvis abscissorum, ut Μ Κ in Μ Λ, inter se æqualia: per Prop. 43^am Lib. III. *Conicorum Apollonii.* Quare inventis punctis Θ, Ν, Π describantur Hyperbola ΧΘΙ, ΦΝΞ, ΟΠΡ, ΣΤΥ: harum omnium Tangentes quælibet auferent rectangula data æqualia ab Asymptotis Α Β, Δ Ε; quod erat faciendum. Hinc etiam manifestum est punctum datum Η, unde ducendæ sunt rectæ Η Λ Κ, intra ambitus Hyperbolarum situm esse, quoties duobus tantum modis componi possit problema; si vero tribus fiat, Curvas ipsas tangere: inter Curvas autem & Asymptotos reperiri, quoties quatuor rectis per punctum Η ducendis idem præstari possit.

LOCUS QUARTUS.

Occurrant invicem rectæ Α Β, Δ Ε in puncto Μ, ac in rectâ Α Β sumatur punctum Μ vel Γ; in ipsâ vero Δ Ε punctum Ζ.

Cadat autem punctum datum H ab altera parte ipsius AB: ac educendæ sint rectæ è puncto H quæ auferant segmenta datum rectangulum continentia. Patet autem hoc fieri posse juxta quatuor modos, recisis segmentis vel ex ipsis ΛM, ZΔ, vel ex ΛM, ZM, vel ex BM, ZE, vel denique ex ipsis ΛM, ZE.

Horum omnium eadem plane est resolutio. Per punctum H ipsi AB parallela ducatur recta HΘ, rectæ ΔE occurrens in puncto Θ; unde punctum Θ datum erit, atque adeo ipsæ rectæ ΘH, ΘM dabuntur magnitudine & positione. Applicetur ad rectam ΘH rectangulum datum Ξ; ac data erit latitudo inde orta, ut recta ZΠ. Erit igitur rectangulum ΘH in ZΠ æquale rectangulo dato Ξ, hoc est, rectangulo MK in ZΛ; adeoque ΘH erit ad MK sicut ΛZ ad ZΠ. Sed ΘH est ad MK sicut ΛΘ ad ΛM: quare ΘΛ est ad ΛM sicut ΛZ ad ZΠ. Componendo autem in Casu tertio, vel dividendo in cæteris, erit ΘM ad MΛ sicut ΛΠ ad ΠZ; rectangulum itaque ΘM in ΠZ æquale erit rectangulo MΛ in ΛΠ. Datum autem est rectangulum ΘM in ΠZ, ob datam utramque rectam; datur itaque rectangulum MΛ in ΛΠ, applicandum ad rectam datam MΠ excedens quadrato in primo ac tertio Casu, vel deficiens quadrato in secundo & quarto, ut habeantur puncta omnia Λ. Quoniam vero in omni Casu ΘΛ est ad ΛM sicut ΛZ ad ZΠ; ubicunque ex hypothesi punctum Λ intermedium esse debet inter Θ & M, punctum Z



quoque intermedium erit inter Λ & Π; ac proinde recta ZΠ ad contrarias partes à puncto Λ situm habebit. Si vero Λ externum fuerit, externum erit & Z; unde ad easdem partes

sive

five versus punctum A semper collocanda est recta data Z Π. Quod si juxta hanc regulam ponatur recta Z Π, ad easdem partes ad quas jacet punctum H, respectu rectæ AB; applicandum erit rectangulum ΘM in ZΠ ad rectam MΠ deficiens quadrato; at si in contrarias partes ponenda sit recta ZΠ, rectangulum illud applicandum erit ad MΠ2 excedens quadrato. Atque hæc omnia obtinent in Locis sexto & septimo sequentibus.

Hinc manifestum est, in Casu primo ac tertio, applicandum esse rectangulum ΘM in ZΠ ad rectam MΠ2 excedens quadrato; ut habeantur puncta A1, A3: adeoque problemata illa semper possibilia esse, rectasque puncto Z propiores semper spatia minora auferre remotioribus. Constat etiam MA in tertio semper æquari ipsi Π2A in primo. Punctum autem A in tertio semper cadet inter puncta Θ & M, quia rectangulum ΠA in AM, hoc est ΘM in ΠZ, necessario minus est rectangulo ΘM in ΘΠ2.

Casus autem secundus & quartus requirunt, ut applicetur rectangulum ΘM in ZΠ ad rectam MΠ deficiens quadrato; ac proinde Casus hi Dioristici sunt. Non enim applicari potest ad rectam ΠM rectangulum quod majus fuerit quadrato ex dimidio ipsius ΠM; quo in Casu problema impossibile erit. Fiet autem modo singulari, si reperiatur punctum A in medio ipsius ΠM; sive si fuerit rectangulum ΘM in ΠZ æquale quadrato dimidii ipsius Π M, hoc est, quadrato ipsius AM. Erit igitur ΘM ad MA sicut MA sive AΠ ad ΠZ; adeoque ΘM erit ad ΘA sicut MA ad AZ. Permutando autem ΘM erit ad MA sicut ΘA ad AZ. Quocirca ΘM erit ad ΘA sicut ΘA ad ΘZ; unde recta ΘA media proportionalis erit inter datas ΘM, ΘZ, adeoque data est.

Capiatur itaque media proportionalis inter ΘM, ΘZ, quæ sit ΘA: ac ponatur utrinque in recta ΔE, ut ΘA2, ΘA4. Ac jungatur utraque HKA. Manifestum est rectam HKA2, in secundo Casu, abscindere spatium maximum MK in AZ; alteram vero KHA4 in quarto, auferre spatium minimum. Etenim in secundo, accedente rectâ HA ad puncta Z vel M, minui potest recta MK vel ZA in nihilum; earumque alterâ evanescente evanescit etiam earundem rectangulum MK in ZA: quocirca in hoc casu recta HA2, bisecans ipsam MΠ, aufert rectangulum maximum. In quarto autem Casu, accedente rectâ

rectâ K Λ ad parallelismum vel rectæ ΛB, vel ipsius Δ E, augetur rectangulum in infinitum; adeoque recta K Λ 4, per medium ipsius M Π ducta, aufert rectangulum minimum. Facile esset hæc ad modum Diorismῶn *Apollonii* demonstrare; sed, brevitati consulens, in exercitium studiosi Analystæ relinquenda potius censeo.

Componetur autem problema hoc modo. Manentibus descriptis, ductâque rectâ parallelâ Θ H, capiatur media proportionalis inter Θ M, Θ Z, ut Θ Λ; & utrinque ponatur recta Θ Λ, ad Λ2 & Λ4. Ducantur rectæ H Λ2, K H Λ4; & hæ auferent extrema rectangula M K in Λ Z; maximum quidem recta H Λ2, minimum vero K Λ4. Si igitur rectangulum datum Ξ majus fuerit maximo vel minus minimo, non componi potest problema juxta hos Casus. Si vero minus fuerit maximo, fiet dupliciter juxta secundum; si majus minimo dupliciter juxta quartum. Si æquale fuerit maximo, sola recta H Λ2 satisfacit problemati, quod impossibile erit modo quarto. Si æquale fuerit minimo, sola recta K Λ4 solvit problema juxta secundum impossibile. Modo autem primo & tertio rectangula quævis absque limitibus abscindi possunt. Fiat igitur ut rectangulum Z Π in Θ H æquale sit rectangulo dato Ξ, & utrinque ponatur recta Z Π super rectam Δ E. Dein ipsi M Π2, utrisque Z Π, M Z simul sumptis æquali, utrinque applicetur rectangulum Θ M in Z Π excedens quadrato: sint illa rectangula M Λ1 in Π2 Λ1 & M Λ3 in Π2 Λ3. Si vero rectangulum Ξ nec majus fuerit maximo, nec minus minimo, applicari potest rectangulum Θ M in Π Z deficiens quadrato ad rectam M Π, differentiam ipsarum Z Π, Z M: Factâ autem utrinque applicatione, habebuntur puncta Λ2 vel Λ4, quæ in altero tantum horum Casuum, vel bina erunt vel unum tantum, juxta limitationes præcedentes. Minimum enim in quarto, multo majus est maximo in secundo. Inventis autem punctis Λ, ducantur & producantur rectæ H Λ: dico omnes illas abscindere rectangula M K in Z Λ rectangulo dato Ξ æqualia.

In omni autem Casu eadem est demonstratio. Quoniam enim rectangulum Θ M in Π Z æquale est rectangulo M Λ in Λ Π; erit Θ M ad M Λ sicut Λ Π ad Π Z; adeoque Θ Λ ad Λ M, hoc est Θ H ad K M, erit ut Λ Z ad Z Π; quocirca rectangulum Θ H in Z Π, hoc est rectangulum Ξ, per Constructionem, æquale

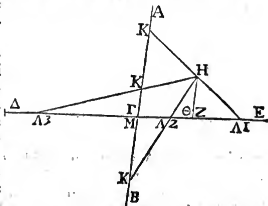
est

est rectangulo KM in ΛZ. Rectæ igitur omnes KHΛ ad hunc modum inventæ solvunt problema. Q. E. D.

Rectangulum autem maximum & minimum eodem argumento determinantur, quo limites rationum habentur in *Sectione Rationis*, ad Locum sextum & septimum Libri primi. Maximum enim in Casu secundo æquale est rectangulo ΘH in excessum quo ipsæ ΘM, ΘZ simul sumptæ superant illam quæ potest quater rectangulum ΘM in ΘZ. Minimum vero in quarto æquale est rectangulo ΘH in rectam compositam ex utrâque ΘM, ΘZ, & illâ quæ potest quater rectangulum ΘM in ΘZ; simul sumptis.

LOCUS QUINTUS.

Occurrat jam recta parallela HΘ rectæ ΔE, in puncto Z coincidente cum puncto Θ. Ducendæ sunt rectæ quæ auferant rectangulum MK in ZΛ æquale rectangulo dato Ƶ. Hoc autem fieri potest tribus modis, vel enim abscissa erunt segmenta ex ipsis AM, ZE, vel è BM, MZ, vel tertio ex ipsis AM, ZΔ. Una autem est Analysis omnium, eadem & facillima Compositio. Quoniam enim ZH est ad ZΛ ut MK ad ΛM, ob similia triangula, rectangulum ZH in ΛM æquale erit rectangulo ZΛ in MK. Datum autem est rectangulum ZΛ in MK, adeoque datur rectangulum ZH in ΛM. Datur vero recta ZH, adeoque & ΛM data est; ac dato puncto M punctum Λ quoq; datur: quare & rectæ HKΛ positione dantur.



Componetur autem problema si applicetur rectangulum datum Ƶ ad rectam parallelam HZ vel HΘ; & latitudo, orta ex applicatione ΛM, à puncto M utrinque ponatur ad Λ; dein ducantur rectæ duæ HΛ. Dico utramque problemati satisfacere. Ob similia enim triangula ZΛ est ad HZ sicut ΛM ad MK, adeoque rectangulum HZ in ΛM æquale est rectangulo

ZΛ

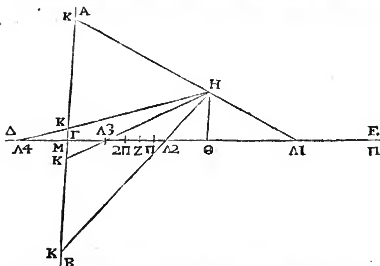
Z Λ in M K. Sed H Z in Λ M factum est ipsi Ξ æquale: erit igitur rectangulum Z Λ in M K rectangulo Ξ æquale. Q. E. D.

Abscindi autem nequit modo primo rectangulum quod minus sit rectangulo H Z in Z M; nec modo secundo quod majus fuerit eo. At si æquale fuerit rectangulo H Z in Z M, neutro modo fieri potest, coincidente recta K Λ cum parallelâ H Z, nec unquam ipsi A B occurrente. Problema autem possibile est in quovis rectangulo juxta Casum tertium.

LOCUS SEXTUS.

Cadat jam punctum Z, in recta Δ E sumptum, intra parallelas datas A B, H Θ. Ac manifestum est rectas duci posse quæ auferant rectangulum datum, sive M K in Z Λ, juxta quatuor modos: vel enim abscissa erunt segmenta ex ipsis Z E, A M; vel ex Z Θ, B M; vel ex Z M, M B; vel quarto ex ipsis Z Δ, A M.

Horum omnium Resolutio in nihilo fere differre invenie-



tur à Loci quarti Analysi; nisi quod hic Casus primus coincidit cum quarto quarti, & tertius hujus cum secundo quarti &c. Facto enim rectangulo H Θ in Z Π æquali rectangulo dato M K in Z Λ, erit in omni Casu Θ H ad M K, hoc est Θ Λ ad Λ M sicut Λ Z ad Z Π; adeoque dividendo in primo & quarto Casu, vel componendo in secundo ac tertio Θ M erit ad M Λ ut Λ Π ad Π Z: rectangulum igitur Θ M in Π Z æquale

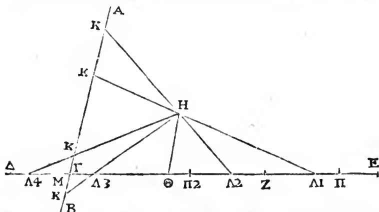
erit rectangulo MΛ in ΛΠ. Dato autem rectangulo ΘM in ΠZ, datur quoque rectangulum MΛ in ΛΠ, ad rectam datam MΠ applicandum, ut habeantur puncta Λ. In Compositione itaque, applicato rectangulo auferendo Ξ ad rectam ΘH, sit latitudo inde orta recta ZΠ; quæ ponatur utrinque à puncto Z versus Θ & M: & ad MΠ2 quæ differentia sit ipsarum ZM, ZΠ, applicetur rectangulum ΘM in ZΠ excedens quadrato, in secundo & quarto Casu. In secundo autem cadet punctum Λ2 inter Θ & Z, quia rectangulum MΛ in ΛΠ2, sive ΘM in ΠZ, minus est rectangulo ΘM in ΠΘ, ob ΠZ minorem quam ΠΘ. Idemque majus est rectangulo MZ in Π2Z, quia ΘM major est quam ΠZ; adeoque punctum Λ2 nec ultra Θ, nec citra Z cadere potest. In primo autem & tertio Casu, applicetur dictum rectangulum deficiens quadrato ad rectam MΠ, quæ sit summa ipsarum MZ, ZΠ. Ac patet punctum Λ1 cadere ultra punctum Θ, quia rectangulum ΘM in ΠZ majus est rectangulo ΘM in ΘΠ. In tertio verò cadet punctum Λ3 inter puncta Z & M, quia ZΠ in ΘM majus est rectangulo ZΠ in MZ. Pari autem argumento ac in Loco quarto constat, Casum secundum ac quartum hujus semper possibiles esse, & segmenta rectangulum quodvis continentia auferri posse: primum autem & tertium determinationes habere; ac rectangulum extremum in primo minimum esse, in tertio maximum. Denique in his etiam rectangulum minimum in primo æquari rectangulo ipsius ΘH in rectam compositam ex utrâque ΘM, ΘZ & illâ quæ potest quater rectangulum ΘM in ΘZ simul sumptis. In tertio autem rectangulum maximum æquale esse rectangulo ΘH in excessum, quo utraque ΘM, ΘZ superant illam quæ potest quater rectangulum ΘM in ΘZ. Hæc omnia consequuntur ex eo quod puncta Λ1 & Λ3, per quæ rectæ HΛ auferentes extrema rectangula ducuntur, bisecant rectas MΠ: unde fit ut ΘΛ1, ipsi ΘΛ3 æqualis, media proportionalis sit inter ipsas ΘZ, ΘM. Quocirca si rectangulum Ξ majus fuerit maximo ac minus minimo, non nisi modo secundo & quarto componi potest problema. Sin minus fuerit maximo vel majus minimo, quadrupliciter efficietur. At si æquale fuerit maximo, fiet modo singulari, juxta tertium: quemadmodum juxta primum, si æquale fuerit minimo. Impossibile autem est idem rectangulum juxta utrumque modum primum & tertium

tertium auferri, quia minimum in primo multo majus est maximo in tertio. Quoniam vero in omni Casu fecimus rectangulum ΘM in ΠZ æquale rectangulo MΛ in ΛΠ; erit ΘM ad MΛ ut ΛΠ ad ΠZ, ac dividendo vel componendo ΘΛ erit ad ΛM ut ΛZ ad ZΠ. Sed ΘΛ est ad ΛM sicut ΘH ad KM; quare ΘH est ad KM ut ΛZ ad ZΠ: atque adeo rectangulum ΘH in ZΠ, hoc est rectangulum datum Ξ, æquale est rectangulo KM in ΛZ. Rectæ igitur omnes HKΛ ad hunc modum inventæ solvunt problema.

LOCUS SEPTIMUS.

Cadat jam punctum Z, in rectâ ΔE sumptum, ultra punctum Θ; ac ducendæ sint rectæ HKΛ per datum punctum H, quæ auferant rectangulum ZΛ in KM æquale dato. Patet hoc fieri posse quatuor modis; ablatis segmentis, vel ex ipsis ΛM, ZE; vel ex ΛM, ZΘ; vel ex BM, ZM; vel denique ex ipsis ΛM, ZΔ.

Quoniam rectangulum MK in ZΛ datum est, eidem æquale fiat rectangulum ΘH in ZΠ; unde ob datam ΘH, ipsa quoque ZΠ data erit: Est itaque ΘH ad KM, hoc est ΘΛ ad ΛM, ut ΛZ ad ZΠ. Dividendo autem in Cas. I, II, & IV, vel componendo in tertio; ΘM erit ad MΛ ut ΛΠ ad ΠZ; atque adeo rectangulum ΘM in ΠZ æquale erit rectan-



gulo MΛ in ΛΠ, applicandum ad rectam datam MΠ. Dantur itaque per 58um & 59um *Dat. Euclid.* puncta applicationum Λ; adeoque rectæ ipsæ HKΛ positione datæ sunt.

Mani-

Manifestum autem est applicandum esse rectangulum illud deficiens quadrato in Casu primo & tertio, excedens vero quadrato in secundo & quarto. Hi autem omnes Casus possibiles sunt, neque limitibus obnoxii, ob easdem causas propter quas Locus quartus in *Sectione Rationis* diorismum non habet. Est enim rectangulum M Λ1 in Π Λ1, hoc est Θ M in Z Π, minus rectangulo quovis M Z in Z Π; quia M Z majus est quam Θ M: adeoque cadet punctum Λ1 inter Z & Π. Similiter, quia Θ M in Z Π minus est rectangulo M Θ in Θ Π, cadet semper punctum Λ3 inter puncta M,Θ,quæcunque fuerit magnitudo dati rectanguli. Cadet etiam Λ2 semper inter puncta Z & Θ, quia rectangulum Θ M in Π Z minus est rectangulo M Z in Z Π2; uti majus est rectangulo M Θ in Θ Π2.

Componetur itaque problema eodem modo quo præcedentia; applicato enim rectangulo dato Ξ ad rectam parallelam Θ H, fit Latitudo inde resultans Z Π; quæ utrinque ponatur à puncto Z, versus E & M, ad Π & Π2: dein applicetur utrinque rectangulum Θ M in Z Π ad rectam M Π deficiens quadrato, & erunt puncta applicationum Λ1, Λ3. Applicetur etiam ad M Π2 idem rectangulum Θ M in Z Π excedens quadrato; & habebuntur puncta applicationum Λ2, Λ4. Ducantur quatuor rectæ H Λ, si opus est ad K producendæ; dico omnes has problema solvere, hoc est, auferre rectangula Z Λ in M K æqualia rectangulo Ξ. Demonstratio autem eadem est omnino cum præcedentibus. Nam cum, per constructionem, rectangulum M Λ in Λ Π æquale sit rectangulo Θ M in Z Π, erit Θ M ad M Λ sicut Λ Π ad Π Z: componendo autem vel dividendo Θ Λ erit ad M Λ sicut Λ Z ad Π Z. Sed Θ Λ est ad M Λ sicut H Θ ad K M; quare H Θ est ad K M ut Λ Z ad Z Π; atque adeo rectangulum H Θ in Z Π æquale erit rectangulo K M in Λ Z. Est autem rectangulum H Θ in Z Π æquale rectangulo Ξ. Quocirca rectangulum K M in Λ Z æquale est rectangulo dato Ξ. Q. E. D.

Ut autem in Loco tertio, rectæ omnes datum spatium abscindentes, binas oppositas & conjugatas Hyperbolas contingunt; sic etiam in his quatuor ultimis Locis, rectæ omnes, rectangulum datum M K in Z Λ auferentes, tangunt binas Hyperbolas oppositas, quodammodo etiam conjugatas, nec multo majori opere describendas: est enim recta Δ M Z E communis Asymptotos. Ipsi A B parallela per punctum Z ducatur

recta ΞZΥ; dein ad rectam datam ZM applicetur rectangulum datum MK in ZΛ, sitque latitudo ZΞ, ZN; MΠ, MO, utrinque à punctis Z & M ponenda. Jungantur ipsæ ΞΠ, NO, sese intersecantes in puncto Γ; quod (ob parallelas & æquales ZΞ, MΠ; ZN, MO) reperietur in medio ipsius ZM; eritque punctum Γ utrarumque oppositarum Hyperbolarum commune centrum: rectæ vero ΞΓΠ, NΓO earundem erunt diametri transversæ. Utrisque autem conjugata semidiameter

eadem erit; nempe recta ZΞ vel MO. His si æquales fiant ΞΣ, OP, & ab altera parte NΥ, ΠT; erunt rectæ ΣΓT, PΓΥ, Hyperbolarum Asymptoti; puncta quoque N, Ξ, O, Π tangent ipsas Hyperbolas describendas. Dantur itaque & Asymptoti, & in unaquâque Hyperbolâ punctum unum; unde facili negotio puncta quotlibet invenire licet, locumque quæ-

situm

situm exhibere. Descriptis autem oppositis Hyperbolis Η Ξ Φ, Ω Π α; ac Χ Ν Ψ, β Ο γ: dico rectas omnes easdem aliquo modo contingentes abscindere rectangula Μ Κ in Ζ Λ æqualia spatio dato, sive rectangulo Μ Ζ in Ζ Ξ. Quoniam enim rectæ Σ Τ, Α Β parallelæ sunt, continguntque Hyperbolas oppositas in punctis Ξ, Π; ac ducitur Tangens alia ut Κ κ Η Λ, contingens Hyperbolam Η Ξ Φ in puncto Η, occurrensque ipsi Ζ Ξ in κ: erit per 42^{dam} III. *Conic. Apollonii*, rectangulum κ Ξ in Π Κ æquale quadrato ex Ζ Ξ, hoc est rectangulo Ζ Ξ in Π Μ. Hinc κ Ξ erit ad Ξ Ζ ut Μ Π ad Π Κ; adeoque dividendo κ Ζ erit ad Ζ Ξ ut Μ Κ ad Κ Π. Permutando autem κ Ζ erit ad Μ Κ, hoc est Ζ Λ ad Λ Μ, sicut Ζ Ξ vel Μ Π ad Π Κ; quare per conversionem rationis Ζ Λ erit ad Ζ Μ ut Μ Π ad Μ Κ. Erit igitur rectangulum Ζ Μ in Μ Π sive Ζ Ξ æquale rectangulo Ζ Λ in Μ Κ. Sed fecimus rectangulum Ζ Μ in Μ Π æquale spatio dato; quapropter rectæ omnes Κ κ Η Λ abscindunt spatia Μ Κ in Ζ Λ æqualia dato. His autem æqualia sunt rectangula omnia Ζ κ in Μ Λ, quia Ζ Λ est ad κ Ζ ut Μ Λ ad Κ Μ. Et argumento omnino simili idem demonstrabitur in Tangente quâvis κ Κ δ Λ, Λ ι Κ κ, Κ κ η Λ, quomodocunque ductâ. Locum itaque exhibuimus quæsitum. Puncta autem contactûs habebuntur dividendo bifariam partes Tangentium inter Asymptotos interceptas, ut ζ Λ in puncto Η: vel capiendo Λ Θ ad Λ Ζ ut Μ Λ ad Λ Ζ + Μ Λ; unde consequens est Λ Θ mediam esse proportionalem inter Θ Ζ, Θ Μ.

Manifestum autem est puncti Η situm esse in spatio infinito Α Δ Β, si fuerit problema juxta Casus Loci quarti; sive si fuerit punctum Μ intermedium inter Ζ & Θ. In spatio autem infinito Σ Ε Τ collocari, si fuerit Ζ inter Θ & Μ; ut in Loco sexto. Intra vero parallelas datas Α Β, Σ Τ reperiri, in omni casu Loci septimi. In ipsâ vero rectâ Σ Ζ Τ positum esse punctum Η, si fuerit juxta Locum quintum. Præterea si punctum Η tangat aliquam ex his Curvis, patet tribus rectis solvi posse problema. Si fuerit Η intra Curvarum ambitus, duabus tantum. Quod si exterius fuerit, vel inter Asymptotos & Hyperbolas, vel intra angulos Ρ Γ Σ, Τ Γ Τ, duci possunt quatuor omnino rectæ per idem punctum datum, rectangulum datum abscindentes.

APOL-

APOLLONII PERGÆI

De Sectione Spatii,

SIVE

ΠΕΡΙ ΧΩΡΙΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ,

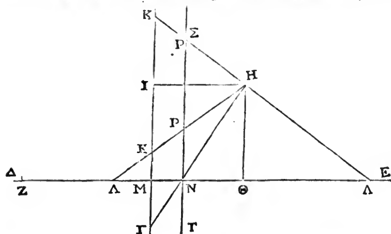
Liber Secundus Restitutus.

APOLLONII quidem liber ſecundus de Sectione ſpatii, teſte *Pappo*, in ſexaginta Caſus diviſus eſt (non ſeptem, ut perperam habent MSS *Saviliani* & *Commandini* traductio; errore orto ex eo quod in Græcis Codicibus ſcribatur ζ pro ξ). Cum enim *Sectio Rationis* in Lib. II. ſexaginta tres habeat Caſus; ac Locus ſeptimus in *Sectione Spatii* omiſſus ſit ὡς φανερὸς, tribus conſtans Caſibus: manifeſtum eſt ſexaginta Caſus habuiſſe librum hunc ſecundum. Qui vero perlegerit hos ſexaginta tres Caſus in *Sectione Rationis*, illos omnes ad tres formulas facile reduci deprehendet: idemque etiam in *Sectione Spatii* fieri poſſe. Vel enim puncta data Z vel Γ reperientur in rectis parallelis HΘ, HI, coincidentia cum punctis Θ vel I; vel erunt in eâdem rectâ data tria puncta H, Γ, Z: vel his conditionibus liber erit ſitus utriuſque puncti Γ & Z in rectis poſitione datis AB, ΔE.

CAPUT I.

Imprimis autem capiatur ad libitum in recta AB punctum Γ, in ipsâ vero ΔE punctum Z; ita ut nec Z reperiatur in concurſu parallelæ HΘ cum rectâ ΔE, nec Γ in concurſu ipſius AB cum parallelâ HI: neque ſint tria puncta H, Γ, Z in eâdem rectâ. His poſitis una eademque erit in unoquoque Caſu & Analyſis & Syntheſis. Jungatur enim recta HΓ, ac, ſi opus ſit, producatur ea ad occurſum cum rectâ ΔE in N. Datum eſt igitur punctum N, ac ratio ipſius HΓ ad HN quoque datur. Per N ipſi AB parallela ducatur recta ΣNT, quæ proinde

proinde positione data est. Ob similia vero triangula, ΓΚ est ad ΝΡ sicut ΓΗ ad ΗΝ; adeoque ratio ΓΚ ad ΝΡ datur; hoc est ratio rectanguli ΓΚ in ΖΛ ad rectangulum ΝΡ in ΖΛ. Sed rectangulum ΓΚ in ΖΛ datur; quare rectangulum ΝΡ in ΖΛ etiam datur. Jam dantur positione rectæ duæ ΔΕ, ΣΤ;



& in ΔΕ sumitur punctum Ζ, in ipsâ vero ΣΤ punctum Ν, & oportet ducere per punctum Η rectam ΗΡΛ, quæ auferat rectangulum ΖΛ in ΝΡ datum. Dantur autem positione rectæ omnes ΗΡΛ, per Casus Loci IV^ti, si fuerit punctum Ν intermedium inter Ζ & Θ: vel per Casus Loci VI^ti, si fuerit Ζ inter Θ & Ν: vel deniqne per Casus omnes Loci septimi si fuerit Θ inter puncta Ν & Ζ.

Componentur autem omnia hujusmodi problemata si producatur recta ΗΓ ad Ν,ac ductâ rectâ ΣΝΤ ipsi ΑΒ parallela, fiat ut ΗΓ ad ΗΝ ita rectangulum auferendum Ξ ad aliud Ο. Dantur autem rectæ duæ ΔΕ,ΝΣ sese interfecantes in puncto Ν; ac in ΔΕ sumitur punctum Ζ, in ipsâ vero ΣΝΤ punctum Ν. Ducantur igitur per punctum datum Η rectæ ΗΡΛ (per casus requisitos è Locis prædictis Lib. I.) quæ auferant segmenta ΝΡ, ΖΛ rectangula æqualia rectangulo Ο continentia. Dico easdem rectas abscindere etiam segmenta ΓΚ & ΖΛ quæ comprehendant rectangula æqualia dato Ξ. Quoniam enim ΓΚ est ad ΝΡ sicut ΗΓ ad ΗΝ, erunt etiam rectangula ΓΚ in ΖΛ ad rectangula ΝΡ in ΖΛ, in eadem ratione. Sed Ξ est ad Ο etiam in ratione ΗΓ ad ΗΝ: quare invertendo &

permutando, rectangulum O erit ad NP in ZΛ, ut rectangulum Ξ ad ΓK in ZΛ. Sed fecimus NP in ZΛ æquale rectangulo O; quare etiam rectangula ΓK in ZΛ æqualia sunt rectangulo Ξ. Q. E. D.

Determinantur autem duo Casus, in utroque Loco, ubi Θ non est intermedium inter puncta N & Z: Ac juxta Diorismos Loci quarti & sexti, manifestum est quod, si capiatur ΘΛ media proportionalis inter ΘN, ΘZ; ac ponatur ea ad utramque partem puncti Θ; dein ducantur rectæ HPKΛ, KΣHΛ; utraque recta HΛ auferet rectangulum extremum: nempe rectangulum PN in ZΛ majus, ac ΣN in ZΛ minus, quovis alio rectangulo, juxta Casus illos à rectis ZΘ, NΣ, vel ZE, NΣ auferendo. Rectangulum autem maximum æquale erit contento sub HΘ & excessum quo utræque ZΘ, ΘN simul sumptæ superant illam quæ potest quater rectangulum ZΘ in ΘN. Minimum vero æquale erit contento sub HΘ & utrasque ZΘ, ΘN, una cum illâ quæ potest quater rectangulum ZΘ in ΘN simul sumptas; per limitationes Loci IV[ti] & VI[ti] Libri primi. Quoniam vero rectangulum NP in ZΛ est ad rectangulum ΓK in ZΛ ut NP ad ΓK, hoc est, ut HΘ ad ΓI, erit rectangulum maximum ΓK in ZΛ æquale rectangulo ΓI in $\Theta Z + \Theta N - \sqrt{4 Z\Theta N}$. Pariter erit rectangulum minimum æquale rectangulo ΓI in $\Theta Z + \Theta N + \sqrt{4 Z\Theta N}$.

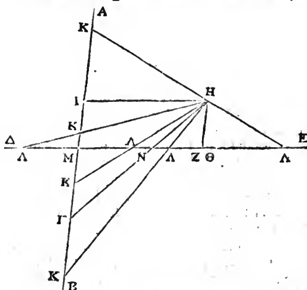
Hinc evidenter consequitur quod, si ductâ rectâ HNΓ, punctum N intermedium fuerit inter Θ & Z; vel punctum Z inter Θ & N; non nisi duobus modis componi possit problema, quoties rectangulum datum Ξ majus fuerit maximo vel minus minimo. Si vero æquale fuerit maximo vel minimo, fieri potest juxta tres formas. Quod si minus fuerit rectangulo $\Gamma I \times \Theta Z + \Theta N - \sqrt{4 Z\Theta N}$; vel majus quam $\Gamma I \times \Theta Z + \Theta N + \sqrt{4 Z\Theta N}$; tum quatuor diversis rectis abscindi possunt segmenta ΓK, ZΛ spatium datum comprehendentia; uti etiam in omni Casu ubi punctum Θ intermedium reperitur inter puncta Z & N. Hi enim reducuntur ad Casus Loci septimi Lib. I. nec opus est ut in his deducendis diutius immoremur. Hæc autem particulatim demonstrata erant in octo Locis (nempe I, III, IV, V, IX, XI, XII, & XIII.) Libri secundi *Apollonii*, in Casus XL subdivisis, ad exemplum Lib. II. de *Sectione Rationis*. Sed Resolutio & Compositio ut & demonstratio in omnibus fere eadem est.

CAPUT

CAPUT II.

Coincidat jam punctum Z cum puncto Θ, ac capiatur ad libitum punctum Γ in recta A B. Si vero puncta H & Γ fuerint ad diversas partes rectæ Δ E, habebimus Casus Loci secundi. Si ad easdem; ac Γ fuerit ultra I versus A, proponuntur Casus Loci septimi. Quod si reperiatur Γ inter puncta M & I, Locus erit octavus *Apollonio*, cui correspondet nonus in *Sectione Rationis*. Singuli autem Loci quaternos habent Casus, quos tamen omnes eadem omnino methodo & resolvere & construere licet.

Ducatur enim recta H K Λ auferens rectangulum Γ K in Z Λ æquale dato. Jungatur H N Γ, occurrens ipsi Δ E in puncto N. Ob similia triangula, erit Z Λ ad Z H ut H I ad I K; atque etiam Z N ad Z H ut H I ad I Γ: erit igitur rectangulum Z Λ in I K æquale rectangulo Z N in I Γ (utrumque enim æquale est rectangulo dato Z H in H I.) Quocirca Λ Z erit ad Z N ut Γ I ad I K; adeoque in omni Casu Z Λ erit ad Λ N ut I Γ ad Γ K. Rectangulum igitur Z Λ in Γ K æquale erit rectangulo Λ N in I Γ. Sed rectangulum Z Λ in Γ K datum est, ergo &



rectangulum Λ N in I Γ. Datâ autem rectâ I Γ, ipsa quoque N Λ datur. Cumque punctum N datur, punctum Λ etiam datur; atque adeo recta H K Λ positione datur.

 Compo-

Componentur itaque omnia hujus generis problemata, si ductâ rectâ Η Ν Γ applicetur rectangulum datum Ξ ad rectam Γ Ι; & à puncto Ν ponantur utrinque rectæ Ν Λ æquales latitudini inventæ. Jungantur ambæ Η Λ Κ. Dico utramque satisfacere problemati. Quoniam enim rectangulum Ι Κ in Ζ Λ æquale est rectangulo Ι Γ in Ζ Ν; erit Κ Ι ad Ι Γ ut Ν Ζ ad Ζ Λ; adeoque dividendo vel componendo Κ Γ erit ad Ι Γ ut Ν Λ ad Λ Ζ. Quapropter rectangulum Κ Γ in Ζ Λ æquale erit rectangulo Ι Γ in Ν Λ. Hoc autem fecimus rectangulo Ξ æquale; erit igitur rectangulum Κ Γ in Ζ Λ æquale rectangulo Ξ. Q. E. D. Etiamsi vero quatuor Casus habeant singuli hi Loci apud *Apollonium*, non nisi duabus rectis rectangulum quodvis datum abscindere licet, utrinque ab ipsa Η Γ æqualiter distantibus. Manifestum est autem rectas puncto Ν propiores abscindere semper minora spatia remotioribus.

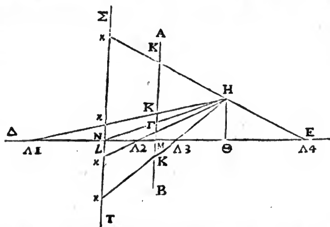
CAPUT III.

Coincidat autem punctum Ν cum puncto Ζ; ita ut tria illa Η, Ζ, Γ sint in eâdem rectâ. Jam si intermedium fuerit Ζ vel Γ, proponuntur Casus Loco sexto in *Sectione Rationis* analogi. Si vero intermedium ponatur Η, Locus erit undecimus ejusdem; qui, ob omissum in Lib. II. de *Sectione Spatii* septimum, ab *Apollonio* decimus numerabatur. Uterque autem Locus quatuor Casus habet.

Ducatur recta Η Κ Λ, auferens rectangulum Γ Κ in Ζ Λ dato æquale, ac ipsi Α Β per punctum Ζ vel Ν agatur parallela Σ Ζ Τ. Junctâ rectâ Η Γ Ζ, erit ut Η Γ ad Η Ζ ita Γ Κ ad Ζ κ, atque adeo rectangulum Γ Κ in Ζ Λ ad rectangulum Ζ κ in Ζ Λ, erit in eadem ratione. Datur autem ratio Η Γ ad Η Ζ, ut & rectangulum Γ Κ in Ζ Λ: quare rectangulum Ζ κ in Ζ Λ datur. Ventum est igitur ad Casus Loci tertii Lib. I. Dantur enim rectæ duæ Σ Τ, Δ Ε; ac in utrâque sumitur commune punctum Ζ; oportet autem ducere per punctum datum Η rectas Η Κ Λ, spatia dato æqualia abscindentes, ut Ζ κ in Ζ Λ.

Componetur autem problema, si fiat ut Η Γ ad Η Ζ ita rectangulum datum Ξ ad rectangulum aliud Ο; ac ducantur rectæ Η κ Λ auferentes à rectis Σ Τ, Δ Ε rectangula Ζ κ in Ζ Λ æqualia rectangulo Ο. Hoc autem semper fieri potest duobus modis ad formam Casuum primi & secundi Loci III. Casus autem

autem tertius ejusdem limitem habet; nec eo modo abscindi potest rectangulum ΓK in ZΛ, quod minus fuerit rectangulo

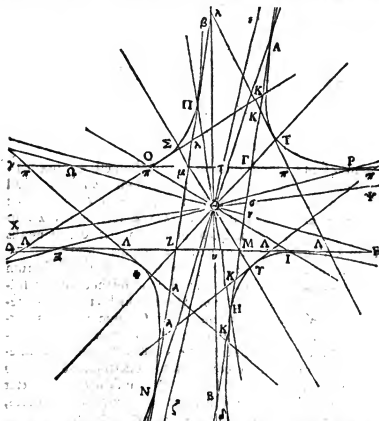


HΘ in 4ΘM. Quod quidem manifestum est ex prædicto Loco tertio. Rectangulum enim minimum xZ in ZΛ est ad minimum ΓK in ZΛ, ut HZ ad HΓ, sive ut ZΘ ad ΘM: minimum est autem HΘ in 4ZΘ è rectangulis Zx in ZΛ, quare etiam HΘ in 4ΘM minimum erit è rectangulis ΓK in ZΛ juxta Casum quartum auferendis.

Hactenus *Apollonii* vestigia, quantum ex analogiâ horum librorum licuit, insectatus sum; ejusque methodum in resolvendo problemate de *Sectione Spatii* non levi indicio assecutus mihi videor: tantorum autem Casuum minutias percurrere haud vacat. Restat *Locum Geometricum*, quem tangunt rectæ omnes à positione datis AB, ΔE, segmenta auferentes, datum spatium continentia punctisque ad libitum sumptis Γ, Z adjacentia, exhibere. Qui quidem *Locus* constat ex binis oppositis Hyperbolis commune centrum habentibus, non autem conjugatis; sed quas hoc modo describeris.

Per punctum Γ ipsi ΔE; ac per Z ipsi AB parallelæ duæ ducantur ut PΓμΩ ac ΠμZN; sese intersecantes in μ. Fiant ZM in ZΠ & ΓM in ΓP æqualia rectangulo auferendo Ξ: atque ipsæ ZΠ, ΓP dantur. Ponantur ZN, ΓA, ΓH æquales ipsi ZΠ, uti & ΓO, ZΞ, ZI ipsi ΓP æquales: ac manifestum est quatuor rectas parallelas contingere *Locum* quæsitum in punctis A, H, Π, N; P, O, I, Ξ. Jungantur puncta opposita OI, ΠH, AN, ΞP, & habebimus quatuor diametros occurren-

tes inter se in communi Hyperbolarum centro Θ, in medio junctæ rectæ ZΓ, quæ proinde erit quoque diameter. Conjugata autem semidiameter ad transversam diametrum HΠ, erit recta Hν, quæ media est proportionalis inter HΓ & HM æqualem ipsi Πμ: recta vero Iυ, media proportionalis inter IZ & IM ipsi Oμ æqualem, erit conjugata semidiameter Hy-



perbolæ ejusdem ad diametrum OI, per dictam 42^{am} III. *Conicorum*. Jam si fiant HB ipsi Hν, ac IE ipsi Iυ æquales, ac producantur utræque EνΘΩ, BυΘβ, erunt hæ oppositarum Hyperbolarum HΥI, OΣΠ Asymptoti duæ. Datis autem Asymptotis & punctis O, Π; H, I, Curvæ ipsæ per 4^{am} II^{di} *Conicorum* levi negotio describuntur. Similiter, si capiatur Aσ media proportionalis inter AΓ, AM; ac fiat in MA productâ Aι ipsi Aσ æqualis, ac producatur recta ιΘζ: erit hæc

hæc una Aſymptotorum Oppoſitarum Curvarum ATP, ΞΦN, occurrens ipſi Γμ in puncto π. Fiat etiam PΨ ipſi Pπ æqualis, atque erit recta ΨσΘX altera earundem Aſymptotorum. Dantur quoque puncta A, P; N, Ξ; unde & ipſæ Hyperbolæ dantur poſitione, per eandem 4^{am} II^{di}.

Deſcriptis autem utriſque Hyperbolis; dico rectas omnes eaſdem contingentes abſcindere è rectis AB, ΔE, ſegmenta ΓK & ZΛ rectangula æqualia rectangulis ZM in ZΠ vel ΓM in ΓP continentia; hoc eſt rectangulo Ξ æqualia. Occurrant enim Tangentes rectæ parallelæ ΠZN in punctis λ, ipſi vero OΓP in punctis π. Capiatur autem, Exempli gratiâ, recta KλπΛ contingens Curvam ΠΣO. Ob parallelas Tangentes AH, ΠN, erit, per 42^{am} III^{i} *Conic.* rectangulum HK in Πλ æquale rectangulo HΓ in Πμ; unde KH ad HΓ ut μΠ ad Πλ; ac dividendo KΓ erit ad HΓ ut μλ ad λΠ. Permutando autem KΓ erit ad μλ, hoc eſt Γπ ad πμ, ut HΓ ſive ZΠ ad Πλ; unde per Converſionem rationis, Γπ erit ad Γμ ſive ZM, ut ZΠ ad Zλ; atque adeo rectangulum Γπ in Zλ æquale erit rectangulo ZM in ZΠ, hoc eſt rectangulo Ξ, per Conſtructionem. Huic autem æquale eſt rectangulum KΓ in ZΛ; quia KΓ eſt ad Γπ ut Zλ ad ZΛ. Ergo conſtat propoſitio; nec pluribus opus eſt, cum eodem omnino argumento, mutatis mutandis, idem de quâvis aliâ Tangente demonſtrari poſſit.

Hinc aperitur alia, & à præcedentibus diverſa, methodus componendi problemata hæc in rectis non parallelis, referendo ea ad duo priora Loca Lib. I. Quoniam enim rectangulum ZΠ in MH æquale eſt cuivis rectangulo Πλ in HK, à rectâ quâvis KΛ contingente Hyperbolas OΣΠ, HTI, diametroque ΠH occurrente, abſciſſo; eademque recta KΛ abſcindit etiam rectangulum ZΛ in ΓK æquale rectangulo dato ZΠ in ZM: Si in recta ΠZN loco Z capiatur punctum Π, & in AB punctum H loco puncti Γ; ac fiat ut ZM ad MH ita rectangulum auferendum Ξ ad aliud O: deinde per punctum quodvis datum ducantur (juxta Caſum II. Loci primi, vel Caſum II. & III^{um} Loci ſecundi Lib. I.) rectæ duæ KΛ auferentes rectangula Πλ in HK æqualia rectangulo O, hoc eſt rectangulo ZΠ in MH: manifeſtum eſt eaſdem rectas KΛ abſcindere ſemper rectangula ΓK in ZΛ æqualia rectangulo Ξ, ſive ZΠ in MZ. Similiter ſi capiantur puncta A & N

loco

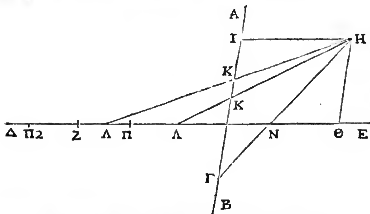
loco ipsorum Γ & Z; ac ducantur rectæ duæ ΚΛ auferentes, per eosdem Casus, rectangula ΑΚ in ΝΛ æqualia rectangulo ΜΑ in ΖΝ: eædem rectæ abscindent etiam rectangula ΓΚ in ΖΛ æqualia rectangulo dato ΑΓ sive ΖΝ in ΖΜ, hoc est, rectangulo Ξ. Constat autem bis duas semper duci posse rectas, juxta Cas. II. & III. Loci secundi, quia limites non habent hi Casus: adeoque semper quatuor dari responsa, si fuerit punctum datum intra parallelas ΑΒ, ΝΠ. Determinatur autem Loci primi Casus secundus; unde certis tantum conditionibus possibile erit problema, si punctum unde ducendæ sunt rectæ, fuerit extra parallelas illas. Limites autem habentur ex iis quæ in Loco illo tradita sunt. Hæc omnia etiam demonstrari possunt in rectis duabus parallelis ΔΕ, ΡΩ, eodem modo easdem oppositas Hyperbolas contingentibus: quia rectæ omnes ΚΛ, auferentes rectangula ΞΛ in Ρπ æqualia rectangulo ΞΜ in ΓΡ; atque etiam auferentes rectangula ΙΛ in Οπ æqualia rectangulo ΙΜ in ΓΟ, abscindunt quoque rectangula ΓΚ in ΖΛ æqualia rectangulo ΓΜ in ΡΓ vel ΖΞ, hoc est, rectangulo dato Ξ, per Constructionem. Q. E. D.

Hæc autem levia sunt Prop. 42[dæ] III[i] *Conicorum* Corollaria nec pluribus prosequenda. Quoniam vero *Pappo* visum est has duas, *Rationis* nempe & *Spatii*, Sectiones, totidem generalibus Propositionibus, in Præfatione ad VII[mum]. descriptas dare; experiri placuit an earundem etiam solutiones pari compendio tradi non possint. Cumque quæ hactenus dicta sunt, harum Artium Studiosos tantum respicere videantur; Mathematicorum peritos jam alloquor; utriusque problematis generalem effectionem omnium simplicissimam ac maxime concinnam expositurus: unde etiam admiranda analogia & affinitas inter has duas satis superque elucebit.

Duabus rectis ΑΒ, ΔΕ positione datis, cæterisque ut in præcedentibus; ducantur utrique datæ parallelæ ΗΘ, ΗΙ: ac jungatur recta ΓΗ, ad occursum cum recta ΔΕ si opus fuerit producenda. Eidem autem occurrat in puncto Ν. Deinde applicetur rectangulum auferendum ad rectam ΓΙ, ita ut rectangulum ΓΙ in ΖΠ æquale fuerit rectangulo dato Ξ: ac ad utramque partem ponatur recta ΖΠ, ad Π & Π2. Applicetur jam rectangulum ΖΠ in ΘΝ excedens quadrato, utrinque ad rectam ΝΠ2; ac si fieri possit, etiam ad ΝΠ

deficiens

deficiens quadrato; & habebuntur omnia puncta Λ: per quæ ducantur rectæ HKΛ. Dico rectas omnes HKΛ solvere problema. Quoniam enim rectangulum NΛ in ΛΠ æquale est rectangulo ΘN in ZΠ, erit ΛΠ ad ΠZ sicut ΘN ad NΛ; atque adeo ΠΛ erit ad ΛZ ut ΘN ad ΘΛ. Sed ΘN est ad ΘΛ sicut IK ad IΓ (ob æqualia rectangula ΘN in IΓ & ΘΛ in IK.) Erit igitur ΠΛ ad ΛZ sicut KI ad IΓ. Quocirca ΠZ erit ad ZΛ ut KΓ ad IΓ: unde rectangulum ΠZ in IΓ, quod æquale fecimus rectangulo Ξ, erit quoque rectangulo ΓK in ZΛ æquale. Adeoque rectæ HKΛ solvunt problema.



Quod si auferenda fuerit ratio ΓK ad ZΛ, quæ fuerit ut N ad O; Iisdem manentibus, fiat ut N ad O ita IΓ ad ZΠ, ac ponatur ZΠ utrinque ad Π & Π2. Dein applicetur rectangulum ΘN in ZΠ excedens quadrato, utrinque ad rectam ΘΠ; atque etiam, si fieri possit, applicetur idem deficiens quadrato ad rectam ΘΠ2: ac puncta applicationum designabunt possibilia quæque puncta Λ, per quæ ductæ rectæ HKΛ solvant problema. Quoniam enim rectangulum ΘΛ in ΛΠ æquale est rectangulo ΘN in ΠZ, erit ΘΛ ad ΘN sicut ZΠ ad ΠΛ. Sed ΘΛ est ad ΘN sicut IΓ ad IK (ob rationem modo dictam) igitur ΓI est ad IK ut ZΠ ad ΠΛ: adeoque ΓI erit ad ΓK sicut ZΠ ad ΛZ. Permutando autem ΓI erit ad ZΠ sicut ΓK ad ZΛ. Sed fecimus ΓI ad ZΠ sicut N ad O. Quapropter ΓK est ad ZΛ sicut N ad O. Q.E.D.

Insuper adnotare licet, quemadmodum in *Sectione Spatii*, in Casibus ubi Θ non fuerit intermedium inter Z & N, rect-

angulum maximum æquale eſt eo quod fit ſub ΙΓ in ΘΝ + ΘΖ — √.4ΝΘΖ; minimum vero æquale rectangulo ΓΙ in ΘΝ + ΘΖ + √4ΝΘΖ. Sic in Sectione Rationis, cum punctum Ν non fuerit inter Θ & Ζ, ratio minima eadem eſt ac ratio ipſius ΓΙ ad ΘΝ + ΝΖ — √4ΘΝΖ: maxima vero ratio erit ut eadem ΓΙ ad ΘΝ + ΝΖ + √4ΘΝΖ.

Reducitur autem problema de ducendâ Tangente ad Curvam Parabolicam, (cujus duæ quælibet Tangentes aliquo modo dentur, una cum puncto contactûs in utrâque; vel ſi dentur tres Tangentes cum puncto contactûs in earum aliquâ; vel etiam quatuor Tangentes abſque puncto) ad illud de *Sectione Rationis*, per ea quæ in Scholiis ad finem libri utriuſque tradita ſunt; quia rectæ omnes datam Parabolam contingentes, auferunt à datis Tangentibus ſegmenta datam inter ſe rationem habentia, ad modum eo loci demonſtratum. Per priora autem duo Loca *Sectionis Spatii* Lib. I. datis magnitudine & poſitione diametris quibuſvis conjugatis vel Ellipſeos vel Hyperbolæ, duobus modis deſignantur Tangentes à dato quovis puncto ad contactum Coniſectionis ducendæ, etiamſi Curva non deſcripta fuerit. Nam ſi per extremitates unius diametri ducantur rectæ duæ alteri diametro parallelæ, & rectâ de puncto dato ducendâ abſcindantur ſegmenta rectangulum æquale quadrato alterius ſemidiametri continentia, extremitatibuſque prioris diametri in parallelis datis adjacentia; per converſam propoſitionis 42ᵈᵃ Lib. III. *Conic.* conſtat rectam illam contingere Ellipſin vel Hyperbolam, cujus ſunt diametri datæ. Compoſitio autem fiet per Caſ. Iᵘᵐ. & IIIᵘᵐ. Loci primi, vel primum ſecundi in Ellipſi; & per IIᵈᵘᵐ. primi, vel IIᵘᵐ. & IIIᵘᵐ. ſecundi Loci in Hyperbola: ut perpenſis iis quæ pag. 143, 144. tradidimus manifeſtum erit. Atque hic eſt uſus harum Sectionum non contemnendus quidem: ſed & ad altiora, nempe ad ſolidorum Problematum Compoſitiones, eas adhibuiſſe Veteres, apud ſummum Geometram non levis eſt ſuſpicio.

FINIS.







